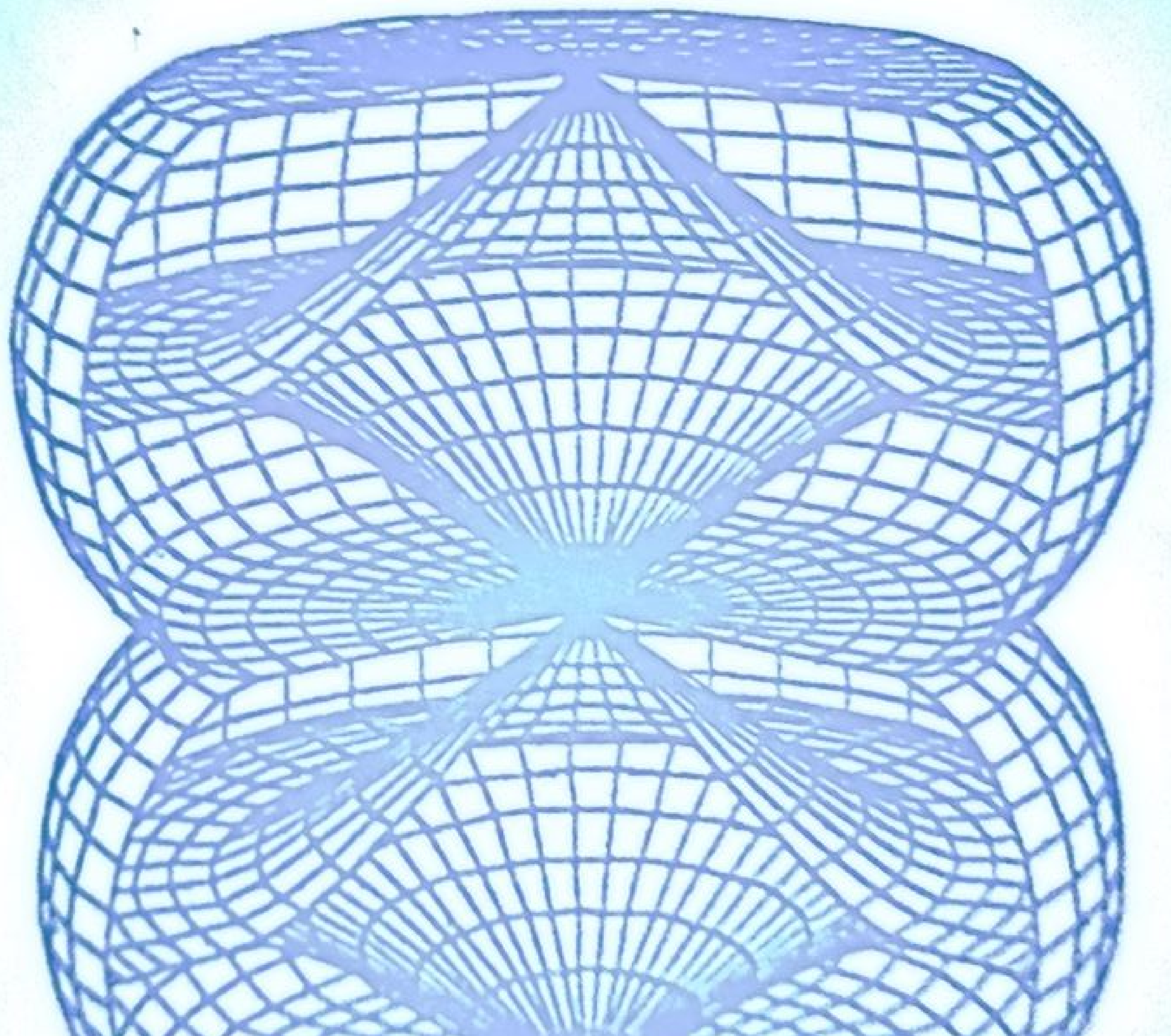
C. DARIESCU M. A. DARIESCU

GRAVITATIE SI CAMPURI IN UNIVERSUL EINSTEIN



GRAVITATIE SI CAMPURI

IN

UNIVERSUL EINSTEIN

Conf. dr. Ciprian DARIESCU
Conf. dr. Marina-Aura DARIESCU

Catedra de Fizica Teoretica
Facultatea de Fizica
Universitatea *Al. I. Cuza* Iasi

GRAVITATIE SI CAMPURI IN UNIVERSUL EINSTEIN

VESPER

EDITURA VESPER
1997

Cuvânt Inainte

Participând în vara aceasta la *The Eighth Marcel Grossmann Meeting on General Relativity*, organizată in Jerusalem, la Hebrew University, am avut ocazia să audiem (printre altele) o foarte interesantă şi nu mai puţin "mişcătoare" prelegere ţinută de renumitul fizician Yuval Ne'eman, laureat al Premiului Nobel, asupra a ceea ce domnia sa numea "norii negri ai fizicii contemporane". In esenţă, cele mai importante concluzii au fost următoarele:

(i) Ritmul dezvoltărilor <u>fundamentale</u> în matematică şi în fizica teoretică a fost mult mai intens la sfârşitul secolului XIX şi prima jumătate a secolului XX decât este acum, la sfârşit de mileniu. Practic, cea care a avansat enorm, mai ales în ultimile decenii, a fost doar *tehnologia* ...

(ii) Dacă este să judecăm cinstit, independent de interesele şi investiţiile financiare avute şi respectiv făcute în domeniul fizicii teoretice, vom constata că cele mai multe dintre aşa zisele cunoştinţe fundamentale asupra realităţii şi naturii Universului în care trăim provin din Mecanica Cuantică şi Teoria Relativităţii Generale, ambele iniţiate şi apoi puternic dezvoltate în primele decenii ale secolului nostru. In comparaţie cu caracterul profund gnoseologic, amplu confirmat experimental, al acestora, nimic spectaculos, cu cel puţin aceeaşi durată de viaţă, impact şi aplicabilitate ştiinţifică, nu a apărut în perioadele mai recente. Fără a atenta la renumele, cunoştinţele şi forţa spirituală de investigaţie ştiinţifică a nici unuia dintre fizicienii contemporani, Ne'eman subliniază doar că cele mai multe dintre descoperirile ultimilor decenii pot fi explicate în termenii fizicii cuantice, teoriei einsteiniene a gravitaţiei şi teoriilor gauge.

(iii) *De ce sunt <u>negri</u> norii fizicii contemporane ?*
Fiindcă, nici unul dintre modelele şi nici una dintre teoriile formulate în a doua jumătate a secolului nostru nu a primit o confirmare experimentală <u>deplină</u>. "Să ne înţelegem", cum spunea eminentul om de ştiinţă, "este vorba de <u>fundament</u>, de ceva pe care să ne

putem cu adevărat baza de acum încolo şi nu doar de umplerea unor goluri ..." Astfel, fără a menţiona chiar toate teoriile, nici ecuaţiile Einstein şi nici ecuaţiile cromodinamicii cuantice nu au fost încă integrate complet şi deci, încă nu ştim ce sunt, în esenţa lor, gravitaţia şi forţele tari. Deasemenea, vestitul Model Standard, al câmpurilor materiale şi interacţiunilor din natură, conţine aproape 20 de parametri introduşi pur şi simplu pentru ca teoria să confirme toate rezultatele experimentale din fizica particulelor elementare şi a energiilor înalte. Este desigur un succes că, având nevoie, ca date de intrare, de numai acest set de parametri, putem explica, evalua şi mai ales anticipa, aproape toate procesele din microcosmos, dar despre *originea* şi *cauza* valorilor acestora nu ştim practic nimic. Nici una dintre teoriile GUT (de unificare largă), prin care se încearcă reducerea numărului de parametri din Modelul Standard, nu este liberă de probleme majore, iar încercarea de soluţionare a acestora, în cadrul aceluiaşi tip de teorii, nu face decât să tot mărească numărul de câmpuri suplimentare, de higgsoni şi de multipleţi, încât, până la urmă, teoria devine mult prea complicată pentru a mai fi aplicată, pierzându-şi toată "supleţea" iniţială. In domeniul teoriilor integrale de evoluţie a Universului, situaţia este oarecum ambiguă. Dacă în urma prelucrării datelor experimentale ale celui mai sofisticat program de explorare la scară foarte largă a Metagalaxiei, experimentul C O B E, este practic sigur că Natura a preferat un "scenariu inflaţionist", în primele momente planckiene ale naşterii ei, nu cunoaştem încă modul exact de dezvoltare a "inflaţiei spaţio-temporale". Această lacună conduce, printre altele, la incertitudini în estimarea teoretică a amplorii violării parităţii combinate, adică a ratei materie/antimaterie în Univers, a numărului de higgsoni şi a masei acestora, a existenţei şi naturii bosonului "leptoquark" X şi, într-o perspectivă mai largă, *chiar a posibilelor căi de evoluţie (viitoare) a prezentului Univers observabil.*

(iv) Totuşi, ar fi absurd şi total neconstructiv să păstrăm o linie negativistă până la capăt. Fizica, în ansamblul ei, pătrunde în secolul

XXI cu un bagaj de cunoştinţe enorm, cu date experimentale şi observaţionale foarte bine puse la punct şi cu teorii atât de avansate, încât scânteia ce va aprinde *Noua Revoluţie* va fi cu adevărat spectaculoasă. In acelaşi timp, chiar şi din greşeli se pot învăţa o mulţime de lucruri; cel puţin ştim, în urma unui conjugat efort ştiinţific internaţional "de ce nu merg" teoriile actuale, le cunoaştem punctele sensibile şi există "câteva idei" (deloc vagi, doar insuficient fundamentate) de remediere a deficienţelor. Astfel, la confluenţa geometriei cu fizica, a apărut un subiect nou de investigaţie, extrem de promiţător, reprezentat de aşa numita "Teorie a 4-varietăţilor". Primele aplicaţii ale sale nu s-au lăsat mult aşteptate: toate cele cinci tipuri de superstringuri, singurele posibile (după cum se poate demonstra), pot fi unificate într-o teorie "mai largă", de dată foarte recentă ('96 - '97), numită "Teoria M" (de la "membranes") cu care vom păşi, cu siguranţă, în mileniul III. Potenţialul ştiinţific al acesteia este încă nebănuit, ea conţinând (cum spuneam) toate tipurile de teorii superstring şi, dacă se va dovedi "liberă de singularităţi", vom avea, probabil, cea mai mare şansă şi cele mai îndreptăţite speranţe de desăvârşire a visului lui Einstein, al *Marii Teorii Unitare.*

Până atunci, parafrazând uşor mesajul laureatului Nobel, "să lăsăm Geniile să lucreze, iar noi, oamenii obişnuiţi, să clădim numai pe temeliile solide ale muncii lor ..."

Aceasta este şi intenţia noastră în prezenta lucrare pe care, cu modestie, o supunem atenţiei cititorului.

In încheiere, dar nicidecum la urmă pe firul simţirii noastre, dorim să aducem cele mai calde mulţumiri profesorilor noştri, părinţilor şi mai ales, sub aspectul colaborării ştiinţifice, domnilor Prof. Dr. Gheorghe Zet, Prof. Dr. Ioan Gottlieb, Acad. Prof. Dr. Doc. Radu Miron şi Conf. Dr. Gheorghe Maftei pentru adevăratul sprijin "de suflet" pe care ni l-au acordat, în căutările şi în formarea noastră, fără de care această carte nu ar fi văzut lumina tiparului.

Iaşi, 6 August 1997 *Ciprian şi Marina-Aura Dariescu*

CUPRINS GENERAL

CAPITOLUL 1 3 - 59

MODELE COSMOLOGICE CU SPATIU BAZA $S^3 \times R$

CAPITOLUL 2 63 - 85

GEOMETRODINAMICA $S^3 \times R$ A CAMPULUI SCALAR COMPLEX

CAPITOLUL 3 89 - 116

FERMIONI PE $S^3 \times R$

CAPITOLUL 4 119 - 157

CAMPUL ELECTROMAGNETIC

CAPITOLUL 5 161 - 196

EXTENSIUNEA GEOMETRODINAMICA $S^3 \times R$ A MODELULUI WEINBERG - SALAM

BIBLIOGRAFIE 197 - 201

Cuprins

1 MODELE COSMOLOGICE CU SPATIU BAZA $S^3 \times R$ **3**

1.1 Aparatul matematic 3

1.1.1 Grupuri şi algebre Lie 3

1.1.2 Elemente de geometrie diferenţială 8

1.2 Universul Einstein 24

1.3 Geometrie $S^3 \times R$ 51

1.4 Cosmologii Robertson - Walker 55

Capitolul 1

MODELE COSMOLOGICE CU SPATIU BAZA $S^3 \times R$

1.1 Aparatul matematic

Dezvoltarea unor teorii gauge pe o varietate spaţio - temporală cu timp ortogonal şi hipersuprafeţe de gen spaţial compacte $\Sigma^3 \times R$, în particular $S^3 \times R$, impune prezentarea succintă a unor noţiuni de grupuri şi algebre Lie [1], precum şi a unor elemente de geometrie diferenţială cum ar fi: fibratul principal şi fibratul tangent, conexiunea liniară, tensorul de curbură, ecuaţiile de structură Cartan, conexiunea Levi - Civita etc. [2-5].

1.1.1 Grupuri şi algebre Lie

Fie $(G, *)$ un grup continuu, sau un grup Lie, unde

- G este o varietate diferenţiabilă şi
- G este un grup cu operaţia de compunere $*$, care este o aplicaţie diferenţiabilă a lui $G \times G$ în G.

Vom nota coordonatele elementului $a \in G$ prin a^α, unde indicele α ia valori discrete. Coordonatele elementelor grupului formează varietatea grupului. Funcţionalele $(a*b)^\alpha$ sunt diferenţiabile în raport cu a^β şi b^γ, $\forall a, b \in G$.

Introducem acum

- translaţia la stânga a lui G, prin elementul a

$$\begin{aligned} L_a &: G \to G \\ L_a(x) &= a * x \,,\ \forall x \in G \end{aligned} \tag{1.1}$$

- translaţia la dreapta a lui G, prin elementul a

$$\begin{aligned} R_a &: G \to G \\ R_a(x) &= x * a \,,\ \forall x \in G \end{aligned} \tag{1.2}$$

- conjugarea, prin elementul a, ca un automorfism intern al lui G

$$\begin{aligned} C_a &: G \to G \\ C_a(x) &= a * x * a^{-1} \,,\ \forall x \in G \end{aligned} \tag{1.3}$$

Observaţii

1. Un vector X definit pe G se numeşte stâng (drept) invariant dacă el este invariant la toate translaţiile $L_a(R_a)$, $a \in G$, adică $L_a(X) = X$ (respectiv $R_a(X) = X$). Un vector stâng (drept) invariant este diferenţiabil.

2. Sferele S^n nu sunt grupuri Lie, cu excepţia lui $n = 1$ şi $n = 3$. In cazul nostru, sfera S^3 este grup Lie.

3. Orice grup Lie este o varietate paralelizabilă. Reciproca nu este adevărată.

Definim algebra Lie $\mathcal{G}$ a grupului Lie G ca fiind mulţimea tuturor vectorilor stâng invarianţi pe G, prin $(\mathcal{G}, [\,,\,])$, unde

- $\mathcal{G}$ este un spaţiu liniar ,
- $[\,,\,] : \mathcal{G} \times \mathcal{G}$
  $(X, Y) \to [X, Y]$ cu proprietăţile:
  - $[\,,\,]$ este liniar în ambele argumente,
  - $[\,,\,]$ este antisimetric, adică

$$[X, Y] = -[Y, X]$$

  - $[\,,\,]$ satisface identitatea Jacobi

$$\sum_{cicl(X,Y,Z)} [X, [Y, Z]] = 0$$

$\mathcal{G}$ este izomorf cu spaţiul tangent $T_e(G)$ în elementul unitate, e, al grupului G. $\mathcal{G}$ este o subalgebră Lie, de dimensiune n $(n = dim\, G)$ a algebrei Lie a vectorilor $\mathcal{X}(G)$.

Fie $\{X_i\}_{i=\overline{1,n}}$ baza algebrei Lie

$$[X_i, X_j] = C^k_{ij} X_k \,, \forall i, j = \overline{1, n} \tag{1.4}$$

unde constantele de structură C^k_{ij} au următoarele proprietăţi :

- C este un tensor de tip (1,2)
- C este antisimetric în indicii de jos

$$C^k_{ij} = -C^k_{ji} \,, \forall i,j,k = \overline{1,n} \tag{1.5}$$

- identitatea lui Jacobi

$$\sum_{cicl(i,j,k)} = C^s_{im} C^m_{jk} = 0 \tag{1.6}$$

Definim aplicaţia exponenţială

$$a(t) \; = \; \exp(tX) \,, \forall t \tag{1.7}$$

Coordonatele $a^\alpha(t)$ definesc o curbă pe varietatea grupului, tangentă la vectorul (X^α) în $t = 0$. Mulţimea punctelor acestei curbe, pentru un X dat, formează un subgrup abelian, uniparametric. $a(t)$ este o curbă unică în G, asociată lui X. Acţiunea grupului G la dreapta, definită prin (1.2), determină atribuirea unui câmp vectorial X^*, indus prin aplicaţia exponenţială (1.7), fiecărui element $X \in \mathcal{G}$.

In continuare, să introducem noţiunea de reprezentare.

Fie G un grup Lie de dimensiune n şi $\mathcal{G}$ algebra Lie asociată, $dim\, G = dim\, \mathcal{G} = n$. Definim grupul matricilor

$$GL(n,R) \; = \; \{A \in \; M(n,R) \,|\, det\, A \neq 0\} \tag{1.8}$$

Algebra corespunzătoare acestui grup va fi notată prin $\mathcal{G}l(n,R)$.

O reprezentare a grupului Lie, G, este o aplicaţie

$$\varphi : G \rightarrow GL$$

iar o reprezentare a algebrei Lie, $\mathcal{G}$, este aplicaţia

$$\phi : \mathcal{G} \to \mathcal{G}l$$

Practic, elementele grupului $GL(n, R)$ pot fi privite ca transformări ale unui set de variabile reale f^i

$$f^{i\prime} = A^i_j(a)\, f^j \tag{1.9}$$

cu proprietăţile:

$$\begin{aligned} a) \quad A^i_j(e) &= \delta^i_j \\ b) \quad A(a * b) &= A(a) \cdot A(b) \end{aligned} \tag{1.10}$$

Considerăm variabilele f^i ca fiind coordonatele unor puncte care formează o varietate diferenţiabilă. Această varietate poate fi dotată cu o metrică naturală, denumită metrică invariantă, cerând ca aceasta să fie invariantă la transformările determinate de generatorul infinitezimal. Pentru grupul G se construieşte reprezentarea adjunctă, prin $(ad\ a)x = C_a(x)$ dat de (1.3). In ceea ce priveşte algebra Lie, $\mathcal{G}$, reprezentarea adjunctă corespunzătoare se introduce prin

$$\begin{aligned} Ad &: \mathcal{G} \to \mathcal{G}l \\ Ad_X(Y) &= [X, Y] \end{aligned} \tag{1.11}$$

Enunţăm următoarea proprietate (fără demonstraţie).

$$e^{Ad(X)} = ad\ e^X \quad , \forall\, X \in \mathcal{G} \tag{1.12}$$

Deoarece vom lucra cu grupuri Lie semisimple, vom introduce un criteriu de caracterizare a acestora. Un grup Lie este semisimplu, dacă şi numai dacă algebra sa $\mathcal{G}$ este semisimplă.

Fie $\{X_i\}_{i=\overline{1,n}}$ baza algebrei $\mathcal{G}$. Construim forma Killing

$$B : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \to R$$

prin

$$B(X_i, X_j) = B_{ij} = C^t_{is} C^s_{jt} \tag{1.13}$$

Dacă $det\, B_{ij} \neq 0$, atunci $\mathcal{G}$ este semisimplă.

Exemplul 1

Considerăm grupul Lie cu trei parametri:

$$SO(3, R) = \left\{ A \in GL(3, R) \mid A^T \cdot A = I_3 \,,\, det\, A = 1 \right\} \tag{1.14}$$

Algebra Lie corespunzătoare este

$$\begin{aligned} [X_1, X_2] &= X_3 \\ [X_2, X_3] &= X_1 \\ [X_3, X_1] &= X_2 \end{aligned} \tag{1.15}$$

Forma Killing

$$B_{ij} = -2\delta_{ij} \tag{1.16}$$

arată că grupul $SO(3, R)$ este semisimplu.

1.1.2 Elemente de geometrie diferenţială

In cele ce urmează, vom prezenta, foarte succint, noţiunile de fibrat, fibrat principal şi fibrat vectorial [5].

Definiţia 1.1 *Se numeşte spaţiu fibrat diferenţiabil local trivial un cinci-uplu (E, π, M, F, G) în care M este o varietate diferenţiabilă, $\pi : E \to M$ este o surjecţie şi sunt verificate condiţiile:*

a) *M poate fi acoperită cu o familie de deschişi U, V, W,... astfel că pentru orice deschis U din familie există o bijecţie* $\varphi_U : \pi^{-1}(U) \to U \times F$ *şi* $\pi(\varphi_U^{-1}(x,y)) = x$, $x \in U$, $y \in F$.

b) *Dacă* $x \in U \cap V$ *şi* $\varphi_U : \pi^{-1}(U) \to U \times F$, $\varphi_V : \pi^{-1}(V) \to V \times F$, *atunci* $\varphi_{V,x} \circ \varphi_{U,x}^{-1} : F \to F$ *este egal cu* L_g, $g \in G$. *Prin* $\varphi_{U,x}$ *s-a notat restricţia bijecţia* φ_U *la* $\pi^{-1}(x)$. *Vom identifica* $\varphi_{V,x} \circ \varphi_{U,x}^{-1}$ *cu elementul g din G.*

c) *Aplicaţia* $g_{UV} : U \cap V \to G$, *dată de* $g_{VU}(x) = \varphi_{V,x} \circ \varphi_{U,x}^{-1}$ *este diferenţiabilă.*

Pentru spaţiul fibrat (E, π, M, F, G) se dau denumirile:

- E este spaţiul total,
- M este spaţiul bază,
- π este proiecţia lui E pe M,
- F este fibra tip,
- grupul Lie, G, este grupul structural.

Definiţia 1.2 *Spaţiul fibrat* (E, π, M, F, G) *se numeşte fibrat principal dacă fibra tip F coincide cu grupul structural G şi acţiunea lui G pe G este dată de translaţia la stânga* $L_g(a) = g * a$, $g, a \in G$.

In cele ce urmează, vom nota fibratul principal cu $\mathcal{P}(M, G)$, sau simplu cu $\mathcal{P}$.

Pentru fiecare $x \in M$, $\pi^{-1}(x)$ este o subvarietate închisă a lui $\mathcal{P}$, numită fibra pe x. Prin acţiunea la dreapta a grupului G asupra punctului u din $\mathcal{P}$,

$$\pi^{-1}(x) : R_a(u) = u * a \; , \; a \in G$$

se va obţine un set de puncte care alcătuiesc fibra prin u. Fiecare fibră este difeomorfă cu grupul G.

Fibratul principal este local trivial. Adică, fiecare punct $x \in M$ are o vecinătate U astfel încât $\pi^{-1}(U)$ este izomorf cu produsul cartezian $U \times G$. Fibratul principal $\mathcal{P} = M \times G$ se numeşte fibrat trivial.

O clasă importantă de spaţii fibrate, cu mare aplicabilitate în fizică, este cea a fibratelor vectoriale.

Definiţia 1.3 *Se numeşte fibrat vectorial un spaţiu fibrat diferenţiabil* (E, π, M, F, G) *în care* F *este un spaţiu vectorial, iar* G *este un grup de automorfisme ale lui* F.

Vom considera numai fibratele vectoriale în care $F = R^m$ şi $G = GL(m, R)$. Reuniunea planelor tangente la toate punctele P de pe varietatea M,

$$T(M) = \cup T_P(M) \tag{1.17}$$

formează fibratul tangent al varietăţii M. Obiectele sale sunt vectorii tangenţi X_P. $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{P(i=\overline{1,n})}$ sunt liniar independenţi şi formează o bază în $T_P(M)$, numită bază de corrdonate sau bază canonică. Dacă M este o varietate diferenţiabilă, de dimensiune n, atunci $T(M)$ este o varietate de dimensiune $2n$. Fie $(x^1, \ldots, x^n)$ coordonatele punctului P de pe varietatea de bază şi $(x^1, \ldots, x^n, \xi^1, \ldots, \xi^n)$ coordonatele locale

pe fibratul tangent, induse de coordonatele locale pe varietatea de bază

$$X_P = \xi^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_P \tag{1.18}$$

Acum putem defini fibratul cotangent al varietăţii M. Sistemul $\{dx^i\}_{i=\overline{1,n}}$ formează o bază pentru spaţiul vectorial dual tangent $T_P^*(M)$. Un element al spaţiului liniar $T_P^*(M)$ este vectorul cotangent

$$\theta = \theta_i (dx^i)_P \tag{1.19}$$

Reuniunea după P a tuturor spaţiilor $T_P^*(M)$ formează fibratul cotangent al varietăţii M.

Fie $\mathcal{P}(M, G)$ un fibrat principal. Pentru fiecare u în $\mathcal{P}$, fie $T_u(\mathcal{P})$ spaţiul tangent în u la $\mathcal{P}$. G_u reprezintă subspaţiul lui $T_u(\mathcal{P})$ constând din vectorii tangenţi la fibra prin u. Avem următoarea sumă directă

$$T_u(\mathcal{P}) = G_u + Q_u \tag{1.20}$$

unde G_u este numit subspaţiu vertical, iar Q_u subspaţiu orizontal al lui $T_u(\mathcal{P})$.

Orice vector $X \in T_u(\mathcal{P})$ poate fi scris, în mod unic, ca fiind

$$X = V + H \tag{1.21}$$

unde V este un vector vertical, iar H este un vector orizontal. Practic, prin vectori verticali, V, vom înţelege vectorii care acţionează în lungul aceleiaşi fibre (ca şi grupul G). Pentru o bază oarecare, $\{V_a\}_{a=\overline{1,n}}$ putem scrie $V = \kappa^a V_a$ cu

$$[V_a, V_b] = C_{ab}^d V_d \tag{1.22}$$

Baza $\{V_a\}$ poate fi exprimată în funcţie de baza locală

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial g^i} \tag{1.23}$$

unde g^i sunt coordonatele elementului $g \in G$, prin

$$V_a = B^i_a \partial_i \tag{1.24}$$

Exemplul 2

Fie G grupul matricilor nesingulare (1.8) cu elementele (g^{ij}) şi fie $G_a(a = \overline{1,n})$ un set de matrici, satisfăcând relaţiile de comutatori (1.22). Exprimăm baza Cartan $\{V_a\}$ sub forma

$$V_a = G^{ij}_a g_{ki} \frac{\partial}{\partial g_{kj}} \tag{1.25}$$

unde g_{ij} sunt elementele matriciale ale lui $g \in G$. Intr-adevăr,

$$\begin{aligned} [V_a, V_b] &= \left[G^{\ i}_{aj} g_{kj} \frac{\partial}{\partial g_{ki}}, G^{\ s}_{bm} g_{pm} \frac{\partial}{\partial g_{ps}} \right] = \\ &= (C^d_{ab}) G^{\ i}_{dm} g_{pm} \frac{\partial}{\partial g_{pi}} = C^d_{ab} V_d \end{aligned} \tag{1.26}$$

Demonstrăm că V, dat de (1.25), acţionează asupra funcţiei $f(x,g)$ la fel ca şi grupul G, adică

$$\begin{aligned} e^V f(x,g) &= e^{\xi^a G^{\ i}_{aj} g_{sj} \frac{\partial}{\partial g_{si}}} f(x,g) = \\ &= \left(1 + \xi^a G^{\ i}_{aj} g_{sj} \frac{\partial}{\partial g_{si}} \right) f = \\ &= f\left(x^\mu,\, g_{si} + \xi^a G^{\ i}_{aj} g_{sj}\right) = f\left(x^\mu,\, g_{sj}\left(\delta^j_i + \xi^a G^{\ i}_{aj}\right)\right) = \\ &= f\left(x^\mu,\, g_{sj}\, e^{\xi^a G_a}\right) \end{aligned} \tag{1.27}$$

Atribuim fiecărui $u \in \mathcal{P}$ subspaţiul Q_u, diferenţiabil, şi introducem conexiunea Γ. Proiecţia $\pi : \mathcal{P} \to M$ induce o aplicaţie liniară π^*. Convenim să notăm această aplicaţie tot cu π,

$$\pi \; : \; T_u(\mathcal{P}) \to T_x(M)$$

pentru fiecare $u \in \mathcal{P}$, unde $x = \pi(u)$. Pentru o conexiune dată, π aplică subspaţiul orizontal Q_u izomorf în $T_x(M)$. Liftul orizontal al unui câmp vectorial X pe M este un câmp orizontal unic, $\hat{H}$, în $\mathcal{P}$, care se proiectează în X :

$$\pi(\hat{H}_\mu) = X_{\pi(u)} \tag{1.28}$$

pentru fiecare $u \in \mathcal{P}$. Fie (x^μ) un sistem local de coordonate, într-o vecinătate U, în varietatea de bază M. Fie $\hat{H}_\mu$ liftul orizontal în $\pi^{-1}(U)$ al câmpului vectorial $X_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \partial_\mu$ din U. Atunci, $\{\hat{H}_\mu\}$ formează o bază locală în spaţiul Q_μ din $\pi^{-1}(U)$. Vectorii $\{\hat{H}_\mu\}$ sunt liniar independenţi şi comută cu vectorii V_a

$$\left[\hat{H}_\mu, V_a\right] = 0 \tag{1.29}$$

Este valabilă relaţia

$$\hat{H}_\mu = \partial_\mu - A^a_\mu l_a \tag{1.30}$$

Spre deosebire de $\{V_a\}$, care corespunde acţiunii grupului la dreapta, $\{l_a\}$ corespund acţiunii grupului la stânga.

Dacă varietatea M este curbă şi se lucrează cu baza rigidă $\{e_\mu\}$, atunci (1.30) devine

$$\hat{H}_\mu = e_\mu - A^a_\mu l_a \tag{1.31}$$

In elementul unitate $g = e$ al grupului G, $\hat{H}_\mu$ acţionează asupra funcţiilor din fibrat $\psi(x, g)$ ca o derivată covariantă

$$\hat{H}_\mu \psi(x, g)|_{g=e} = D_\mu \psi(x) = (e_\mu - A^a_\mu X_a)\psi(x) \tag{1.32}$$

Exemplul 3

Considerăm vectorii l_a de forma

$$l_a = G_a^{ij} g_{jk} \frac{\partial}{\partial g_{ki}} \tag{1.33}$$

Acţiunea elementului de grup asupra unei funcţii $f(x^\mu, g)$ este

$$\begin{aligned} e^{\xi^a l_a} f(x^\mu, g) &= e^{\xi^a G^i_{aj} g^{jk} \frac{\partial a_i}{\partial g^{ki}}} f(x^\mu, g) = \\ &= \left[1 + \xi^a G^i_{aj} g^{jk} \frac{\partial}{\partial g^{ki}}\right] f(x^\mu, g) = f(x, g^{ki} + \xi^a G^i_{aj} g^{jk}) = \\ &= f\left[x^\mu, (\delta^i_j + \xi^a G^i_{aj}) g^{jk}\right] = f[x^\mu, \left(e^{\xi^a X_a}\right) g] \end{aligned}$$

In încheiere, vom introduce, într-o manieră pedagogică, câteva noţiuni de geometrie diferenţială, cum ar fi cele de conexiune liniară, derivată covariantă, tensorul de curbură, 1-formele de conexiune, ecuaţiile Cartan etc., absolut necesare pentru parcurgerea capitolelor următoare.

*

* *

Fie $\mathcal{P}(M, G)$ un fibrat principal şi ρ o reprezentare a lui G în $GL(m, R)$. Fie $E(M, R^m, G, \rho)$ fibratul asociat cu fibra standard R^m, pe care G acţionează prin ρ. Numim E un fibrat vectorial real peste M. Fiecare fibră $\pi_E^{-1}(x)$, $x \in M$ a lui E are o structură de spaţiu vectorial. Fie $\mathcal{F}(M)$ inelul funcţiilor diferenţiabile pe M şi fie $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ - modulul secţiunilor diferenţiabile $\varphi : M \to E$ ale lui E.

Definiţia 1.4 *O lege de derivare pe E sau o conexiune liniară în $\mathcal{E}$ este o lege de compoziţie $D : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{E} \to \mathcal{E}$, notată cu $(X, \varphi) \to D_X\varphi$*

care asociază perechii (X, φ) *o secţiune* $D_X\varphi$ *a lui* E, *astfel încât sunt îndeplinite condiţiile:*

(i) D *este* $\mathcal{F}$ - *liniară în raport cu câmpurile vectoriale, adică*

$$\begin{aligned} D_{X+Y}\varphi &= D_X\varphi + D_Y\varphi,\ X, Y \in \mathcal{X}(M),\ \varphi \in \mathcal{E} \\ D_{fX}\varphi &= f\, D_X\varphi,\ X \in \mathcal{X}(M),\ \varphi \in \mathcal{E},\ f \in \mathcal{F} \end{aligned} \tag{1.34}$$

(ii) D *se comportă ca o lege de derivare (de tip special), adică*

$$\begin{aligned} D_X(\varphi + \psi) &= D_X\varphi + D_X\psi,\ X \in \mathcal{X}(M),\ \varphi, \psi \in \mathcal{E} \\ D_X(f\varphi) &= f\, D_X\varphi + df(X)\,\varphi,\ X \in \mathcal{X}(M),\ \varphi \in \mathcal{E},\ f \in \mathcal{F} \end{aligned} \tag{1.35}$$

(iii) *operatorul* D *este un operator local.*

Definiţia 1.5 *Pentru o lege de derivare, definită pe fibratul vectorial* E *peste* M, *curbura sa este*

$$R(X, Y) = D_X D_Y - D_Y D_X - D_{[X,Y]} \tag{1.36}$$

Considerăm câmpul vectorial X pe M, în baza $\left\{\frac{\partial}{\partial X_i}\right\}_{i=\overline{1,m}}$

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial X^i} \tag{1.37}$$

şi fie $\varphi = \varphi^a s_a (a = \overline{1,n})$ o secţiune diferenţiabilă a lui E. Utilizând Definiţia (1.4), vom obţine:

$$D_X\varphi = D_{X^i\partial/\partial X^i}(\varphi^a s_a) = X^i\left(\frac{\partial\varphi^a}{\partial X^i}s_a + \varphi^a D_{\partial/\partial X^i}s_a\right) \tag{1.38}$$

Definim coeficienţii de conexiune prin

$$D_{\partial/\partial X^i} s_a = \Gamma^b_{ai} s_b \tag{1.39}$$

şi avem

$$D_X\varphi = X^i \left(\frac{\partial \varphi^a}{\partial X^i} + \Gamma^a_{bi}\varphi^b \right) s_a \tag{1.40}$$

Definiţia 1.6 *O conexiune liniară pe varietatea M este o lege de derivare în fibratul tangent T(M) al lui M :*

$$\begin{aligned} \nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) &\rightarrow \mathcal{X}(M) \\ (X, Y) &\rightarrow \nabla_X Y \end{aligned} \tag{1.41}$$

care satisface proprietăţile:

$$\begin{aligned} &(i) \quad \nabla_X(Y_1 + Y_2) = \nabla_X Y_1 + \nabla_X Y_2 \\ &(ii) \quad \nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + (Xf)Y \\ &(iii) \quad \nabla_{X_1+X_2} Y = \nabla_{X_2} Y + \nabla_{X_1} Y \\ &(iv) \quad \nabla_{fX} Y = f\nabla_X Y \end{aligned} \tag{1.42}$$

Forma de curbură se introduce, ca în (1.36), prin

$$R(X,Y)Z = \nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(\nabla_X Z) - \nabla_{[X,Y]}Z \tag{1.43}$$

Definiţia 1.7 *Torsiunea conexiunii liniare pe M este aplicaţia*

$$T : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M) \tag{1.44}$$

dată de expresia

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] \tag{1.45}$$

Exprimăm câmpurile X şi Y în baza locală $\left\{\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}\right\}_{i=\overline{1,m}}$ astfel

$$\begin{aligned} X &= X^i \partial_i \\ Y &= Y^j \partial_j \end{aligned} \tag{1.46}$$

şi introducem notaţia

$$\nabla_{\partial_i} = \nabla_i \tag{1.47}$$

Expresia (1.40) devine

$$\nabla_X Y = X^i \left(\partial_i Y^j + \Gamma^j_{ki} Y^k\right) \partial_j \tag{1.48}$$

unde am notat

$$\nabla_i \partial_j = \Gamma^k_{ji} \partial_k \tag{1.49}$$

In particular, dacă $X = \{\partial_i\}$, vom obţine, pentru (1.48), expresia uzuală a derivatei covariante

$$\nabla_i Y^j = \partial_i Y^j + \Gamma^j_{ki} Y^k , \tag{1.50}$$

componentele tensorului de curbură se obţin, din (1.43), ca

$$R(\partial_i, \partial_j)\partial_k = (\partial_i \Gamma^s_{kj} - \partial_j \Gamma^s_{ki} + \Gamma^p_{kj}\Gamma^s_{pi} - \Gamma^p_{ki}\Gamma^s_{pj})\partial_s , \tag{1.51}$$

iar componentele tensorului de torsiune, se obţin din (1.45), ca fiind

$$T(\partial_i, \partial_j) = (\Gamma^k_{ji} - \Gamma^k_{ij})\partial_k \tag{1.52}$$

Definiţia 1.8 *O varietate diferenţiabilă, de dimensiune m, se numeşte paralelizabilă, dacă pe ea sunt definite m câmpuri vectoriale, $X_1, \ldots, X_m$, care formează un câmp de repere ale lui $T(M)$, peste toată varietatea M.*

Observaţii

1. Dacă M este paralelizabilă, atunci orice câmp Y are o descompunere globală $Y = Y^i X_i$.
2. Grupurile Lie sunt varietăţi paralelizabile.
3. Nu orice varietate diferenţiabilă este paralelizabilă. (De exemplu, sfera S^2).

Exemplul 4

Sfera S^3, definită ca mulţimea punctelor din R^4 cu distanţa până la origine egală cu unitatea,

$$S^3 = \{x = (x^1, x^2, x^3, x^4) \in R^4\ ,\ (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2 = 1\} \tag{1.53}$$

este o varietate paralelizabilă. In orice punct al lui S^3,v om defini trei câmpuri independente, $\{X_1, X_2, X_3\}$, prin

$$\begin{aligned} X_1 &= x^4\partial_1 + x^3\partial_2 - x^2\partial_3 - x^1\partial_4 \\ X_2 &= -x^3\partial_1 + x^4\partial_2 + x^1\partial_3 - x^2\partial_4 \\ X_3 &= x^2\partial_1 - x^1\partial_2 + x^4\partial_3 - x^3\partial_4 \end{aligned} \tag{1.54}$$

tangente la sfera S^3 şi satisfăcând algebra

$$\begin{aligned} [X_1, X_2] &= 2X_3 \\ [X_2, X_3] &= 2X_1 \\ [X_3, X_1] &= 2X_2 \end{aligned} \tag{1.55}$$

Orice câmp vectorial A pe M se poate exprima în această bază ca

$$A = A^i X_i \tag{1.56}$$

Definim conexiunea liniară pe varietatea S^3 ca fiind

$$\nabla_A B = A^i(X_i B^j) X_j \tag{1.57}$$

In raport cu conexiunea (1.57), vectorii bazei au proprietatea

$$\nabla_{X_i} X_j = 0 \tag{1.58}$$

Câmpurile tensoriale de curbură şi de torsiune, calculate cu ajutorul formulelor generale (1.43) şi respectiv (1.45), au expresiile

$$R(X_i, X_j)X_k = 0 \tag{1.59}$$

respectiv

$$T(X_i, X_j) = -[X_i, X_j] = -2\varepsilon_{ijk} X^k \tag{1.60}$$

şi ne arată că pe sfera S^3 se poate defini o conexiune liniară de curbură nulă, fără ca torsiunea să fie nulă.

In cele ce urmează, vom exprima relaţiile (1.43), (1.45) şi (1.48) într-o bază rigidă $\{e_a\}_{a=\overline{1,n}}$, satisfăcând algebra

$$[e_a, e_b] = C^d_{ab}\, e_d\ , \tag{1.61}$$

şi având duala $\{\omega^a\}_{a=\overline{1,n}}$ dată de

$$\omega^a(e_b) = \delta^a_b \tag{1.62}$$

Tensorul de curbură (1.43) devine

$$\begin{aligned} R(e_c, e_d)e_b = R^a_{\ bcd} e_a &= \nabla_c(\nabla_d e_b) - \nabla_d(\nabla_c e_b) - \nabla_{[e_c, e_d]} e_b = \\ &= \left(\Gamma^a_{bd|c} - \Gamma^a_{bc|d} + \Gamma^e_{bd}\Gamma^a_{ec} - \Gamma^e_{bc}\Gamma^a_{ed} - \Gamma^a_{be} C^e_{cd}\right) e_a, \end{aligned} \tag{1.63}$$

unde am introdus notaţia

$$Y^a_{|b} = e_b(Y^a) \tag{1.64}$$

iar tensorul de torsiune, (1.45), are forma

$$\begin{aligned} T(e_a, e_b) = T^c_{ab}e_c &= \nabla_a e_b - \nabla_b e_a - [e_a, e_b] = \\ &= (\Gamma^c_{ba} - \Gamma^c_{ab} - C^c_{ab})\, e_c \end{aligned} \tag{1.65}$$

în care, cu Γ^c_{ab} s-au notat

$$\nabla_{e_b} e_a \equiv \nabla_b e_a = \Gamma^c_{ab} e_c \tag{1.66}$$

şi respectiv

$$\nabla_{e_b}\omega^a \equiv \nabla_b \omega^a = -\Gamma^a_{cb}\omega^c \tag{1.67}$$

Expresia (1.48) capătă forma

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= \nabla_{X^a e_a}(Y^b e_b) = \\ &= X^a Y^b_{|a} e_b + X^a Y^b \Gamma^c_{ba} e_c\,, \text{ cu } Y^b_{|a} = e_a Y^b \end{aligned} \tag{1.68}$$

Vectorii bazei rigide (1.61) şi vectorii bazei duale (1.62) pot fi exprimaţi în baza canonică $\{\partial_i\}_{i=\overline{1,n}}$ şi duala sa, $\{dx^i\}$, astfel

$$\begin{aligned} e_a &= e^i_a \partial_i \\ \omega^a &= \omega^a_i dx^i \end{aligned} \tag{1.69}$$

Aplicăm operatorul diferenţială exterioară celei de a doua ecuaţii din (1.69) şi avem

$$d\omega^a = \partial_k \omega^a_i dx^k \wedge dx^i \tag{1.70}$$

Utilizând formulele (1.66), rescriem termenii în baza $\omega^b \wedge \omega^c$, $(b < c)$. Definim acum 1-formele de conexiune, prin

$$\Gamma^a_{\ b} = \Gamma^a_{bc}\omega^c \tag{1.71}$$

şi 2-forma de torsiune

$$T^a = T^a_{bc}\omega^b \wedge \omega^c \tag{1.72}$$

şi obţinem ecuaţiile de structură ale lui E. Cartan:

$$d\omega^a + \Gamma^a_b \wedge \omega^b = \frac{1}{2}T^a \tag{1.73}$$

$$d\Gamma^a_b + \Gamma^a_e \wedge \Gamma^e_b = \frac{1}{2}R^a_{\ bcd}\omega^c \wedge \omega^d \tag{1.74}$$

Definiţia 1.9 *Se numeşte lege de derivare riemanniană sau conexiune riemanniană, pe un fibrat vectorial E, dotat cu o metrică η, o conexiune liniară D pe E, astfel încât derivata covariantă a lui η în raport cu D este nulă,*

$$D\eta = 0 \tag{1.75}$$

Teorema 1.1 *Pe orice varietate diferenţiabilă există o structură riemanniană.*

O structură riemanniană pe M este dată de un produs scalar pe fibratul tangent $T(M)$. Exprimând vectorii X şi Y în baza locală, adică

$$X = X^i\partial_i$$
$$Y = Y^j\partial_j \tag{1.76}$$

produsul lor scalar va fi

$$g(X,Y) = g_{ij}X^iY^j \tag{1.77}$$

unde am introdus notaţia

$$g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j) \tag{1.78}$$

Printr-o metrică riemanniană, vom înţelege un câmp tensorial covariant simetric, pozitiv definit, de ordin 2.

Componentele contravariante ale lui g se definesc prin

$$g^{ij} = g(dx^i, dx^j) \tag{1.79}$$

cu

$$g_{ij}\, g^{jk} = \delta_i^k \tag{1.80}$$

şi

$$g_{ij} = g_{ji} \tag{1.81}$$

Metrica unei varietăţi riemanniene (adică o varietate diferenţiabilă înzestrată cu o metrică riemanniană) este legată de pătratul elementului de distanţă între două puncte infinitezimal vecine, pe varietatea dată,

$$ds^2 = g_{ij}\, dx^i dx^j \tag{1.82}$$

Teorema 1.2 *Pe orice varietate riemanniană M există o conexiune metrică de torsiune nulă, unică.*

Această conexiune metrică, simetrică, se numeşte conexiunea Levi - Civita şi, exprimată în coordonate canonice, are expresia

$$g\left(\Gamma^s_{ij}\partial_s\,,\,\partial_k\right) = \frac{1}{2}(\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}) \tag{1.83}$$

Pentru câmpurile vectoriale X, Y, Z pe M, avem următoarea expresie generală

$$\begin{aligned} g(\nabla_X Y\,,\,Z) &= \frac{1}{2}\{X(g(Y,Z)) + Y(g(X,Z)) - Z(g(X,Y)) + \\ &+ g([X,Y]\,,\,Z) + g([Z,X]\,,Y) - g([Y,Z]\,,X)\} \end{aligned} \tag{1.84}$$

Tensorul Riemann de curbură este un câmp tensorial, de ordinul 4, definit, în fiecare punct $x \in M$,

$$R(X_1, X_2, X_3, X_4) : T_x(M) \times T_x(M) \times T_x(M) \times T_x(M) \rightarrow R \quad (1.85)$$

prin

$$R(X_1, X_2, X_3, X_4) = g(R(X_3, X_4)X_2, X_1) \ , \ X_i \in T_x(M), \ i = \overline{1,4} \quad (1.86)$$

Dacă $R^i{}_{jkm}$ şi g_{ij} sunt componentele tensorului de curbură şi ale tensorului metric, în raport cu un sistem de coordonate locale, atunci componentele R_{ijkm} ale tensorului Riemann de curbură sunt

$$R_{ijkm} = g_{is} R^s{}_{jkm} \quad (1.87)$$

Dacă M este un spaţiu de curbură constantă, k, atunci avem

$$R_{ijkm} = k(g_{ik}g_{jm} - g_{jk}g_{mi}) \quad (1.88)$$

Câmpul tensorial covariant de ordin 2, numit Ricci şi notat cu S, se defineşte pe o varietate riemanniană M, prin

$$S(X, Y) = \sum_{i=1}^{n} g(R(V_i, X)Y, V_i) = \sum_{i=1}^{n} R(V_i, Y, V_i, X) \quad (1.89)$$

unde $X, Y \in T_x(M)$ şi $V_1, \cdots, V_n$ este o bază ortonormală în $T_x(M)$.

Notând componentele tensorului Ricci cu R_{js}

$$R_{js} = g^{ik} R_{ijks} \quad (1.90)$$

putem scrie curbura scalară, în termeni de g^{ij} şi R_{ij} sub forma

$$R = g^{ij} R_{ij} \quad (1.91)$$

Intr-o bază oarecare $\{e_a\}$, (1.61), cu duala $\{\omega^a\}$, simbolurile lui Christoffel au expresia

$$\begin{aligned}\Gamma^d_{ba} &= \frac{1}{2}g^{ds}\Big\{g_{bs|a} + g_{sa|b} - g_{ab|s} + \\ &+ C_{sab} + C_{bsa} - C_{abs}\Big\}\end{aligned} \tag{1.92}$$

In capitolele următoare, vom lucra preponderent într-o bază $\{e_a\}$, pe varietatea S^3, rigidă. In acest caz, componentele g_{ab} fiind constante, (1.92) devine

$$\Gamma^d_{ba} = \frac{1}{2}g^{ds}\left(C_{sab} + C_{bsa} - C_{abs}\right) \tag{1.93}$$

fiind exprimat doar în funcţie de constantele de structură ale algebrei Lie (1.61).

1.2 Universul Einstein

In acelaşi an, 1917, în care desăvârşeşte formularea Teoriei Relativităţii Generale, Albert Einstein are o a doua idee revoluţionară (în acest domeniu) şi anume deducerea, pe baza unei modelări rezonabile, a unei soluţii exacte a ecuaţiilor sale, valabilă la scara întregului Univers.

Caracterul original al acestei idei constă în faptul că era pentru prima oară când se încerca elaborarea unui cadru teoretic, ferm şi extrem de modern pentru vremea aceea, al unei noi ramuri a fizicii (şi a ştiinţei în general) numită Cosmologie.

Dacă unora dintre cititori această afirmaţie le poate părea oarecum hazardată, trebuie să amintim că, în acei ani, deşi Astronomia era bine consolidată iar în Astrofizică se făceau progrese însemnate,

nivelul înţelegerii conceptuale şi mai ales relaţional - predictibile, a structurii de scară largă a Universului observabil, era încă în stadiul quasi - cosmogonic, iar încercările de extrapolare ad litteram a legii atracţiei universale la scară megagalactică nu au condus decât la o serie de paradoxuri "stânjenitoare" ce indicau imposibilitatea înţelegerii clasice, pre - einsteiniene, a Universului ca întreg. Dintre acestea, cele formulate de Seelinger şi Olbers erau, prin consecinţele lor, cele mai grave. Intr-un univers minkowskian, absolut plat, deschis şi infinit în spaţiu şi timp, o distribuţie continuă, nelimitată şi quasi - uniformă de substanţă (radiantă) ar fi produs tensiuni gravitaţionale (de tip newtonian) infinite pe frontiera oricărei structuri materiale, împreună cu o luminozitate infinită, ce pur şi simplu ar fi "sfărâmat şi pârjolit", până la eventualii constituienţi elementari, orice agregat complex ce s-ar fi dorit macroscopic stabil. Era nevoie de un punct de vedere cu totul deosebit, fizic şi nu mai puţin, filozofic, asupra proprietăţilor geometrice ultramacroscopice ale spaţiu - timpului, ca bază a realităţii fizice, care să elimine aceste două paradoxuri. Aici contribuţia lui Einstein a fost, atât calitativ cât şi cantitativ, esenţială, cu predictibilitate ştiinţifică completă (în cadrul modelului de univers elaborat) şi cu prioritate absolută, în ceea ce astăzi numim Cosmologie Relativistă. Pe lângă Principiul Cosmologic, conform căruia spaţiul fizic tridimensional trebuie să fie omogen şi izotrop la scară largă, adică, la o epocă dată, să arate la fel din orice punct al său şi pe orice direcţie ar fi privit, şi principiul lui Weyl care afirmă că, la scară foarte largă, timpul nu este afectat de prezenţa materiei, Einstein mai introduce încă două ipoteze:

- spaţiul fizic, în loc să fie plat, este de curbură constantă pozitivă şi

- la nivel megagalactic, întreaga materie (din Univers) pare a fi "netezită", având aspectul unui fluid perfect, de presiune nulă, în repaus peste tot, ce are drept constituient elementar (precum moleculele într-un fluid obişnuit) galaxia.

Nu vom discuta aici dacă astăzi aceste ipoteze mai sunt valabile. Ca un răspuns scurt, desigur că nu; dar analiza detaliată a felului în care (şi a motivelor din care) ele au fost modificate şi reactualizate ar reclama elaborarea unei lucrări de dimensiuni (absolut) respectabile ce ar trebui să cuprindă activ (cu calcule şi rezultate concrete) aproape toate domeniile fizicii contemporane. Ceea ce dorim este să familiarizăm, fizico - matematic, cititorul cu acest cel mai simplu model de Univers (relativist) care, orice s-ar spune şi oricum ar fi privit, stă la baza celor mai multe cunoştinţe actuale.

Aşadar, să analiză mai întâi necesitatea ipotezelor.

1. *De ce Principiul Cosmologic ?*

   Aici, cel puţin sub aspect filozofic şi nu de puţine ori metafizic, povestea este foarte veche. Incă de cu mult înaintea erei noastre, au existat vizionari ce au susţinut, în scrierile lor, că Pământul, ca şi restul corpurilor cereşti, sunt simple "grăunţe materiale" călătorind prin spaţii abisale, purtate de un principiu unic, cum ar fi, în filozofia hindusă, cel al desăvârşirii acţiunii (a karmei) sau, în taoism, cel al întoarcerii la (şi unirii cu) vidul tuturor vidurilor. De aici şi până la postularea uniformităţii proprietăţilor globale ale acestor (meta)structuri nu era decât un pas. Oricum, datorită necesităţii formulării lor într-un cadru matematic bine definit, omenirii i-au fost necesare milenii. Mai apoi, după stingerea euforiei pozitivismului primitiv al geocentrismului, a început aven-

tura heliocentrismului, a fost enunţată "pluralitatea lumilor", s-a introdul un concept fundamental, cel de inerţie, iar marele Newton defineşte, pentru prima oară în fizică, e drept cu caracter clasic şi dintr-un punct de vedere pasiv, (în sensul neinteracţiunii cu materia), conceptele de spaţiu şi timp. Datorită caracterului euclidian al primului concept, acesta poseda, în mod evident, proprietăţile de omogenitate şi izotropie. In ce priveşte al doilea concept, timpul, acesta este definit, de la bun început (în fizica clasică), drept o măsură a duratei unui fenomen, ca un parametru monoton crescător (de la trecut spre viitor) ce variază întotdeauna uniform, independent de poziţia sau starea de mişcare a oricărui observator şi de asemenea, independent de conţinutul material al Universului. Desigur, valabilitatea acestei definiţii (a timpului) a fost mai întâi infirmată în cadrul Teoriei Relativităţii Restrânse, pentru cazul sistemelor inerţiale, iar mai apoi complet spulberată, sub aspect general, în cadrul Teoriei Einsteiniene a Gravitaţiei (Teoria Relativităţii Generale), în cazul sistemelor de referinţă manifest neinerţiale. Revenind la spaţiul tridimensional, cea care surprinde matematic semnificaţia fizică a proprietăţilor de omogenitate şi izotropie este matematiciana germană Emmy Neother care demonstrează, în teoremele ce-i poartă numele, că omogenitatea spaţiului, strâns legată de invarianţa la translaţii a unui sistem fizic, exprimă legea conservării impulsului, iar invarianţa la rotaţii, adică izotropia spaţiului, exprimă legea conservării momentului cinetic (orbital). In privinţa legii de conservare a energiei, ea demonstrează că aceasta este o consecinţă directă a scurgerii uniforme a timpului. Aşadar, ca să

concluzionăm, Principiul Cosmologic este necesar, pe de o parte, pentru înlăturarea caracterului poziţiei speciale a vreunui obsevator, sau existenţa vreunei direcţii privilegiate în Univers, iar pe de altă parte, pentru a statuta valabilitatea legilor de conservare ale impulsului şi momentului cinetic, în orice punct al spaţiului tridimensional (nu neaparat plat) privit ca 3 - suprafaţă de foliere, la timp cosmic constant, a întregului Univers. Să trecem la a doua ipoteză.

2. *De ce Principiul lui Weyl ?*
Aici, din punct de vedere fizic, răspunsul nu mai este atât de tranşant ca în cazul primului principiu. Pe lângă ideea conservării energiei în orice punct al Universului, care necesita în baza celei de a treia teoreme a lui Noether, o curgere uniformă a timpului, a fost pur şi simplu supoziţia lui Einstein că într-un spaţiu omogen şi izotrop, umplut uniform cu "materie netezită", în repaus global, timpul nu poate fi decât o dimensiune suplimentară, plată şi ortogonală celor trei dimensiuni spaţiale, exact ca în cazul Universului Minkowski. Se cer acum câteva precizări. In primul rând, dacă timpul nu ar fi fost ortogonal celor 3 - suprafeţe spaţiale, atunci ar fi existat în metrică termeni de forma

$$ds^2 = \cdots + 2g_{\mu 4}dx^\mu dx^4 + \cdots, \mu = \overline{1,3}$$

pentru dimensiunile spaţiale, care exprimă întotdeauna rotaţiile active. Cu alte cuvinte, întregul Univers şi cu atât mai mult cel observabil, s-ar fi aflat în rotaţie. Aceasta presupune existenţa unei direcţii privilegiate, fizic desemnată de axa de rotaţie, ceea ce contrazice primului principiu, în sensul violării izotropiei. In al

doilea rând, dacă direcţia temporală nu ar fi plată, adică dacă g_{44}, în loc să fie -1, ar depinde, de exemplu, de coordonatele spaţiale, atunci $g_{44,\mu}$ (cu $\mu = \overline{1,3}$) ar exprima euristic intensitatea câmpului gravitaţional în lungul coordonatei x^μ şi deci, orice particulă test, în loc să-şi conserve impulsul, cum cere Principiul Cosmologic prin proprietatea de omogenitate a spaţiului, s-ar mişca accelerat după această direcţie. In fine, dacă metrica nu ar fi statică, (adică $g_{\mu 4} \equiv 0$ şi g_{ik}, cu $i, k = \overline{1,4}$, complet independenţi de timp) atunci gravitaţia întregului Univers, împreună cu materia ce-i dă naştere, s-ar afla într-o continuă evoluţie, ceea ce contrazice ipoteza fluidului perfect în repaus global, făcută de Einstein. După cum aveau să arate cercetările teoretice şi observaţiile astronomice de scară largă (ulterioare anului 1917), exact acesta a fost principalul punct slab al modelului. Dar, pentru moment, să continuăm cu

3. *De ce spaţiu de curbură constantă pozitivă ?*
De data aceasta, răspunsul este cât se poate de clar. In primul rând, se ştie din geometria diferenţială că, dacă o varietate riemanniană n - dimensională posedă un grup de mişcare $\frac{n(n+1)}{2}$ - dimensional, adică este omogenă, cu un subgrup ortogonal propriu, $\frac{n(n-1)}{2}$ - dimensional, care este grupul de izometrie, atunci varietatea respectivă este de curbură constantă. In al doilea rând, considerând, cu $c = 1$ (viteza luminii în unităţi aşa zis "naturale"), praful cosmologic (adică fluidul perfect de presiune nulă) ca fiind descris de tensorul conservativ impuls-energie

$$T_{ik} = \rho u_i u_k \,, \tag{1.94}$$

unde ρ este densitatea volumică de energie proprie (a fluidului), iar $u_i = g_{ik}u^k$, cu $u^k = \frac{dx^k}{d\sigma}$, $d\sigma^2 = -ds^2$ fiind parametrul afin al liniilor de univers, sunt componentele covariante ale câmpului cuadrivitezelor fluidului, atunci, din ecuaţiile Einstein

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = \kappa_0 T_{ik} \text{ , cu } R = g^{pm} R_{pm} \tag{1.95}$$

rezultă, prin contracţie cu g^{ik},

$$R = -\kappa_0 \rho g^{ik} u_i u_k \tag{1.96}$$

Dar,

$$g^{ik} u_i u_k = g_{ik} u^i u^k = g_{ik} \frac{dx^i}{d\sigma} \frac{dx^k}{d\sigma} = -\frac{ds^2}{ds^2} = -1 \tag{1.97}$$

şi deci, obţinem "relaţia de trasă"

$$R = \kappa_0 \rho \tag{1.98}$$

Cum $\kappa_0 = \frac{8\pi G}{c^4}$ este evident pozitiv, iar $\rho = \rho_0 c^2$, unde ρ_0 este densitatea masică proprie a prafului cosmologic, trebuie să fie pozitivă (fiindcă nici până acum nu s-au evidenţiat, nicăieri în Univers, structuri materiale de masă negativă), rezultă imediat

$$R > 0 \tag{1.99}$$

In baza principiului lui Weyl, metrica trebuie să fie de forma

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x^\lambda)\, dx^\mu dx^\nu - (dt)^2 \tag{1.100}$$

şi deci, curbura scalară R a Universului 4 - dimensional va fi dată de fapt de curbura scalară $R_{(3)}$ a spaţiului tridimensional,

$$R_{(3)} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \tag{1.101}$$

(fiindcă, după cum vom demonstra mai târziu $R_{44} \equiv 0$, caracterul plat al direcţiei temporale) şi deci, din "relaţia de trasă", obţinem

$$R_{(3)} = \kappa_0 \rho > 0 \qquad (1.102)$$

4. *De ce praf cosmologic în repaus ?*

Ca şi în cazul caracterului plat al direcţiei temporale, aici motivaţia este preponderent de ordin fizic. Să ne imaginăm că dispunem de o foarte bună scară a distanţelor cosmice şi că dorim să explorăm (ca aspect şi proprietăţi) zone tot mai întinse din Univers. După ce am depăşit nivelul sistemului solar, vom avea de aşteptat puţin, cât parcurgem distanţele interstelare, până când în câmpul de observaţie intră primele stele vecine Soarelui. Mărind în continuare distanţa, vom constata o creştere simţitoare a numărului acestor stele precum şi apariţia aşa numitelor formaţiuni sau nori de praf cosmic (a nu se confunda cu praful cosmologic). Puţin după aceasta, pe scara distanţelor, vom vedea că numărul stelelor şi al regiunilor cu nori de praf cosmic devine constant, acestea formând o structură gigantică, de sine stătătoare, având formă lenticulară şi braţe spirale în planul ecuatorial. Aceasta este Galaxia, iar proiecţia pe bolta cerească posedă un diametru de aproximativ 90 mii de ani lumină şi o grosime principală, măsurată în lungul axei de rotaţie a nucleului galactic, de circa 16 mii de ani lumină. Continuând periplul nostru pe scara distanţelor, Galaxia devine "tot mai mică" pe măsură ce parcurgem aşa numitele distanţe intergalactice şi captăm, în câmpul de observaţie, tot mai multe galaxii. La un moment dat, numărul acestora devine constant, cam 20, ele formând ceea ce astronomii denumesc

"grupul local" (de galaxii). Transfocalizând mai departe, vom obţine noi grupuri, în "vecinătatea" grupului local, şi vom constata că toate acestea formează "roiul local" de galaxii. De aici încolo, galaxia devine un simplu "grăunte material", ce poate fi interpretat ca un constituient elementar al roiului. Mărind în continuare distanţa, la sute de milioane de ani lumină, vom vedea Universul spuzit de roiuri de galaxii, ca simple puncte materiale radiante, separate între ele prin zone imense, lipsite de substanţă, pe drept cuvânt numite "giant voids". De aici încolo, în acord cu actualele observaţii, roiurile nu se mai asociază în superroiuri astfel încât, atunci când ajungem la scară megagalactică, adică la nivelul întregului Univers, observabil (cam 12 miliarde de ani lumină), acesta pare "umplut" cu un fluid (aproape) perfect, de presiune foarte redusă, practic zero, lipsit de curenţi convectivi (ultramacroscopici) şi alcătuit "molecular" din roiuri de galaxii. Presiunea acestui fluid este foarte redusă, deoarece energia cinetică a fiecărui roi este mult mai mică decât energia de repaus. De asemenea, fluidul pare a fi în repaus deoarece observaţiile actuale nu confirmă existenţa unei mişcări ordonate, alta decât expansiunea cosmologică (de care nu se ştia nimic în 1917, când Einstein a elaborat modelul), la scară megagalactică, a roiurilor de galaxii. Prin urmare, într-un reper tetradic pseudo - ortonormal (1.69)

$$\vec{e}_a = e^i_a \partial_i \ , \ \text{cu} \ \partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i} \ , \ i = \overline{1,4} \tag{1.103}$$

$$g(\vec{e}_a \, , \, \vec{e}_b) = \eta_{ab} = diag[1, 1, 1, -1] = g_{ik} e^i_a e^k_b \, , \ a, b = \overline{1,4} \tag{1.104}$$

ca bază a secţiunilor fibratului tangent $T(M)$, cu dualul

$$\omega^a = \omega^a_i dx^i , \tag{1.105}$$

cu

$$\omega^a_i = \eta^{ab} g_{ik} e^k_b \tag{1.106}$$

şi

$$ds^2 = \eta_{ab} \omega^a \omega^b \tag{1.107}$$

ca bază a secţiunilor fibratului cotangent $T^*(M)$, ceea ce rămâne din forma generală

$$T_{ab} = (\rho + \varepsilon + p) u_a u_b + \eta_{ab} p \tag{1.108}$$

cu ε ca energie volumică internă şi

$$u_a = \eta_{ab} u^b = \eta_{ab} \frac{\omega^b}{d\sigma} \tag{1.109}$$

drept componente pseudo - ortonormale ale 4 - vitezei, a tensorului conservativ impuls - energie pentru un fluid perfect, este forma particulară

$$T_{ab} = \rho \, \eta_{a4} \eta_{b4} \tag{1.110}$$

a tensorului conservativ pentru "praful cosmologic", dat fiind că, în acest caz

$$\varepsilon = 0 \ , \ p = 0 \ , \ u^\mu = 0 \ , \ \mu = \overline{1,3} \ \text{si} \ u_4 = -1 = \eta_{44} \tag{1.111}$$

Avem acum toate elementele necesare demersului matematic. Datorită izotropiei şi Principiului Weyl, metrica trebuie să fie ultrastatică şi de simetrie sferică, adică

$$ds^2 = (dr)^2 + a^2 e^{2f(r)} \left[(d\theta)^2 + \sin^2\theta (d\varphi)^2 \right] - (dt)^2 \tag{1.112}$$

unde, $a > 0$ este o constantă cu dimensiune de lungime, r este coordonata de tip radial ($r \in R_+$), iar $f : R_+ \to R$ este o funcţie (reală) de clasă (de diferenţiabilitate) cel puţin C^2. Baza duală tetradic pseudo - ortonormală peste secţiunile fibratului cotangent $T^*(M)$ va fi definită de 1 - formele

$$\begin{aligned}\omega^1 &= dr\\ \omega^2 &= ae^f d\theta\\ \omega^3 &= ae^f \sin\theta d\varphi\\ \omega^4 &= dt\end{aligned} \tag{1.113}$$

cu duala corespunzătoare, (1.62), peste secţiunile lui $T(M)$,

$$\begin{aligned}\vec{e}_1 &= \partial_r\\ \vec{e}_2 &= \frac{e^{-f}}{a}\partial_\theta\\ \vec{e}_3 &= \frac{e^{-f}}{a}\frac{1}{\sin\theta}\partial_\varphi\\ \vec{e}_4 &= \partial_t\end{aligned} \tag{1.114}$$

Din prima ecuaţie Cartan (1.73), în absenţa torsiunii,

$$d\omega^a = \Gamma^a_{\ [bc]}\omega^b \wedge \omega^c\,,\ \text{cu } 1 \le b < c \le 4\,, \tag{1.115}$$

rezultă coeficienţii esenţiali de conexiune, (1.66),

$$\begin{aligned}\Gamma_{212} &= -\Gamma_{122} = \Gamma_{313} = -\Gamma_{133} = f_{|1}\\ \Gamma_{323} &= -\Gamma_{233} = \frac{e^{-f}}{a}\cot\theta\end{aligned} \tag{1.116}$$

cu $f_{|1} = \vec{e}_1(f) = \partial_r f$, astfel încât, dintre 1 - formele de conexiune

(1.71), rămân diferite de zero numai

$$\begin{aligned} \Gamma_{12} &= -f_{|1}\,\omega^2 \\ \Gamma_{13} &= -f_{|1}\,\omega^3 \\ \Gamma_{23} &= -\frac{e^{-f}}{a}\cot\theta\,\omega^3 \end{aligned} \tag{1.117}$$

Din al doilea set al ecuaţiilor Cartan de structură, (1.74), adică

$$\mathbf{R}_{ab} = d\Gamma_{ab} + \Gamma_{ac} \wedge \Gamma^c_{\ b}\,,\ 1 \leq a < b \leq 4\,, \tag{1.118}$$

se obţin ca algebric esenţiale numai următoarele 2 - forme de curbură

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{12} &= -\left[f_{|11} + (f_{|1})^2\right]\omega^1 \wedge \omega^2 \\ \mathbf{R}_{13} &= -\left[f_{|11} + (f_{|1})^2\right]\omega^1 \wedge \omega^3 \\ \mathbf{R}_{23} &= -\left[(f_{|1})^2 - \frac{e^{-2f}}{a^2}\right]\omega^2 \wedge \omega^3 \end{aligned} \tag{1.119}$$

astfel încât componentele nenule ale tensorului de curbură în raport cu tetradul $\{\vec{e_a}\}_{a=\overline{1,4}}$ sunt date de expresiile

$$\begin{aligned} R_{1212} = R_{1313} &= -\left[f_{|11} + (f_{|1})^2\right] \\ R_{2323} &= \frac{e^{-2f}}{a^2} - (f_{|1})^2 \end{aligned} \tag{1.120}$$

In aceste condiţii, pentru tensorul Ricci

$$R_{ab} = R^c_{\ acb} \tag{1.121}$$

obţinem următoarele componente netriviale:

$$\begin{aligned} R_{11} &= -2\left[f_{|11} + (f_{|1})^2\right] \\ R_{22} = R_{33} &= \frac{e^{-2f}}{a^2} - \left[f_{|11} + 2(f_{|1})^2\right] \end{aligned} \tag{1.122}$$

care conduc la scalarul de curbură, (1.91),

$$R = -2\left[2f_{|11} + 3(f_{|1})^2 - \frac{e^{-2f}}{a^2}\right] \tag{1.123}$$

şi la următoarele componente algebric esenţiale

$$\begin{aligned} G_{11} &= (f_{|1})^2 - \frac{e^{-2f}}{a^2} \\ G_{22} &= G_{33} = f_{|11} + (f_{|1})^2 \\ G_{44} &= -\left[2f_{|11} + 3(f_{|1})^2 - \frac{e^{-2f}}{a^2}\right] \end{aligned} \tag{1.124}$$

ale tensorului Einstein

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R\,, \text{ cu } g_{ab} = \eta_{ab} = diag[1,\,1,\,1,\,-1] \tag{1.125}$$

In absenţa oricărei alte forme de materie decât praful cosmologic în repaus, ecuaţiile Einstein

$$G_{ab} = \kappa_0\,\rho\,\eta_{a4}\,\eta_{b4} \tag{1.126}$$

s-ar reduce efectiv la sistemul

$$\begin{aligned} (f_{|1})^2 - \frac{e^{-2f}}{a^2} &= 0 \\ f_{|11} + (f_{|1})^2 &= 0 \\ 2\,f_{|11} + 3(f_{|1})^2 - \frac{e^{-2f}}{a^2} &= -\kappa_0\rho \end{aligned} \tag{1.127}$$

Dar, după cum se poate observa scriind a treia ecuaţie sub forma

$$2\left[f_{|11} + (f_{|1})^2\right] + \left[(f_{|1})^2 - \frac{e^{-2f}}{a^2}\right] = -\kappa_0\rho \tag{1.128}$$

şi utilizând primele două ecuaţii (care sunt compatibile), rezultă imediat că nu avem ca soluţie decât spaţiu - timpul Minkowski

$$e^f = \frac{r}{a} \Leftrightarrow ds^2 = (dr)^2 + r^2[(d\theta)^2 + \sin^2\theta(d\varphi)^2] - (dt)^2 \tag{1.129}$$

complet lipsit de materie, dat fiind că, din ecuaţia pentru densitate, rezultă

$$\rho = 0 \tag{1.130}$$

La vremea ei, această situaţie i-a dat "ceva bătaie de cap" lui Einstein. Totuşi, bazându-se pe faptul că efectuarea unor contracţii succesive în al doilea set al identităţilor lui Bianchi, conduce la

$$G^{ab}_{\ ;\,b} = 0 \tag{1.131}$$

care este în deplin acord cu ecuaţia de mişcare

$$T^{ab}_{\ ;\,b} = 0 \tag{1.132}$$

a surselor materiale ale câmpului gravitaţional, Einstein observă că, datorită caracterului metric al conexiunii Levi - Civita

$$g_{ab;c} = 0 \ , \tag{1.133}$$

adăugarea unui "termen cosmologic" de forma $g_{ab}\Lambda$, cu $\Lambda = const.$, în membrul stâng al ecuaţiilor sale, nu violează, în nici un fel, caracterul conservativ al tensorului impuls - energie T_{ab}, al surselor, ba chiar completează, de o manieră unică (după cum se poate demonstra), ecuaţiile relativist generale ale câmpului gravitaţional

$$G_{ab} + g_{ab}\Lambda = \kappa_0 T_{ab} \tag{1.134}$$

De la Einstein încoace, Λ poartă numele de *constantă cosmologică*, având dimensiunea de $(lungime)^{-2}$ şi este estimată şi astăzi (cu oarecare incertitudine) ca situându-se undeva în domeniul de valori $[0, 10^{-50})$ m^{-2}. Din nou sunt necesare câteva completări. Incă din momentul introducerii ei (în 1917) atât fizicienii cât şi filozofii s-au împărţit în două tabere vis- à-vis de semnificaţia şi rolul acestui "termen cosmologic".

O primă grupare susţinea că nu există nici un motiv fizico-matematic pentru ca o astfel de constantă să nu fie introdusă. Ea respectă Principiul Echivalenţei, conform căruia câmpul gravitaţional este descris intrinsec numai de tensorul metric fundamental (g_{ik}) al metricii spaţiu - timpului şi completează Principiul lui Mach, afirmând că inerţia corpurilor nu este numai un produs al acţiunii tuturor celorlalte corpuri din Univers ci şi o consecinţă a proprietăţilor geometrice globale, intrinseci, ale spaţiu - timpului însuşi. Chiar şi în absenţa materiei ordinare, când $T_{ab} \equiv 0$, aşa cum a arătat pentru prima dată de Sitter, chiar în acelaşi an 1917, Universul se poate auto-organiza într-o structură spaţio - temporală evolutivă, de curbură 4 - dimensională constantă, diferită de zero, determinată integral de valoarea nenulă a constantei cosmologice. Dacă $\Lambda > 0$, Universul capătă o expansiune exponenţială (evident, dependentă de timpul cosmic t) în urma căruia galaxiile, privite ca puncte materiale izolate (de probă), intră într-o aşa numită "mişcare recesională" îndepărtându-se unele de altele cu o viteză relativă proporţională cu distanţa geometrică r dintre ele. Această consecinţă (teoretică) a modelului de Univers de Sitter a fost strălucit confirmată observaţional de Hubble, în 1929, în urma unor cercetări, începute încă din 1922, asupra "deplasării spre roşu" a galaxiilor foarte îndepărtate. El practic obţine aceeaşi lege

$$v = Hr \, ,$$

a vitezei recesionale, stabilind şi valoarea constantei H care, de atunci, îi poartă numele. Acest punct de vedere dinamic, eminamente evolutiv, propus de de Sitter şi amplu explicat comunităţii ştiinţifice (din 1928) de către Sir Arthur Eddington, a fost continuat, perfecţionat şi evident modificat, în ce priveşte contribuţia efectivă a materiei prezente (totuşi)

în Univers, de către Le Maitre şi Friedman. Mai târziu, prin anii '30, el este adus la o "formă rotundă", de către Robertson şi Walker, care stă şi astăzi la baza aşa numitului Model Standard (Cosmologic) al Marii Explozii Iniţiale (spaţio-temporale) *Big-Bang* a Universului observabil. Nu mai putem continua aici detalierea investigaţiilor (ştiinţifice) în această direcţie, deoarece am depăşit cu mult cadrul discuţiei referitoare la modelul de Univers propus de Einstein. Ceea ce trebuie să reţinem este faptul că, încă din primele lucrări în care a fost introdusă şi exploatată (cognitiv), această constantă a produs o adevărată turnură de mentalitate în Cosmologia Relativistă, aruncând o lumină nouă asupra fizicii câmpului gravitaţional, de scară (foarte) largă.

A doua tabără (de fizicieni şi filozofi) susţinea, în baza Principiului Economiei de Constante Fizice, că este perfect posibilă şi euristic suficientă, descrierea gravitaţiei <u>numai</u> prin ecuaţiile Einstein cu $\Lambda \equiv 0$, deoarece câmpul gravitaţional se cuplează, la sursele sale materiale printr-o <u>singură</u> constantă <u>fundamentală</u>, anume constanta G, a atracţiei universale.

In acelaşi timp, Principiul lui Mach ar fi respectat chiar în forma sa iniţială deoarece, <u>numai</u> materia descrisă prin $T_{ab} \neq 0$ ar contribui la inerţia corpurilor de probă. Mai mult decât atât, spuneau ei, dacă am accepta prezenţa constantei cosmologice şi aceasta ar avea o valoare <u>negativă</u> (deoarece semnul ei nu poate fi fixat prin raţionamente riguroase, în cadrul Teoriei Relativităţii Generale) atunci gravitaţia "convenţională", întotdeauna <u>atractivă</u>, ar fi acompaniată de un câmp cosmologic universal, eminamente <u>repulsiv</u>, adică de <u>antigravitaţie</u>.

Raţionamentul lor era simplu şi a avut drept consecinţă scăderea, drastică, pentru câteva decenii, a interesului în studiul fizic al soluţiilor

exacte (ale ecuaţiilor Einstein) cu $\Lambda < 0$.

Dacă eliminăm orice distribuţie continuă de materie ordinară, adică cerem $T_{ab} \equiv 0$, atunci ecuaţiile Einstein cu termen cosmologic se pot scrie simplu

$$G_{ab} = \kappa_0 \left(-g_{ab} \frac{\Lambda}{\kappa_0} \right) \tag{1.135}$$

Prin urmare, putem interpreta tot termenul cosmologic ca reprezentând o distribuţie continuă de extramaterie, caracterizată de tensorul conservativ impuls - energie

$$T_{ab}[\Lambda] = -g_{ab} \frac{\Lambda}{\kappa_0} \tag{1.136}$$

Dar, după cum ştim, într-un reper rigid pseudo - ortonormal, în care $g_{ab} = \eta_{ab}$, componenta T_{44} reprezintă densitatea volumică de energie (deci şi de masă). Dacă estimăm $T_{44}[\Lambda]$, obţinem că

$$T_{44}[\Lambda] = \frac{\Lambda}{\kappa_0} < 0 \text{ , pentru } \Lambda < 0 \tag{1.137}$$

ceea ce arată că, masa acestui câmp este negativă adică, el "va fugi" din liniile câmpului gravitaţional convenţional (produs întotdeauna de corpuri de masă pozitivă) având deci, o comportare antigravitaţională. Evident, prelungind raţionamentul, rezultă că toate particulele test de masă pozitivă vor fi respinse de acest câmp universal, da masă negativă. Resuscitarea interesului în investigarea structurilor spaţio - temporale cu $\Lambda < 0$ s-a produs după vreo 50 de ani (de la introducerea termenului cosmologic) şi a avut la bază două concepte noi, absolut neortodoxe pentru fizica anilor /50 - /70, aparent foarte diferite dar, în fapt, puternic corelate, deoarece reclamau aceeaşi cauză pentru producerea lor, şi anume, prezenţa densităţilor negative de energie.

Primul dintre aceste concepte a fost dezvoltat (iniţial) de către Kip Thorne, după o idee formulată de Sir John Archibald Wheeler, care afirma că, cel puţin teoretic, Relativitatea lui Einstein nu interzice existenţa unor structuri spaţio - temporale cu totul speciale, sub aspectul topologiei lor, care să conecteze direct, deci pe "drumuri" foarte scurte, prin adevărate tuneluri extradimensionale (faţă de hiperplanul Metagalaxiei), zone (altfel) foarte îndepărtate din Univers.

Ca un exemplu, care a devenit tipic odată cu trecerea anilor, gândiţi-vă că unui vierme, aflat la unul dintre polii suprafeţei sferice a unui măr, îi poate fi mult mai uşor să călătorească direct spre celălalt pol, săpându-şi un tunel prin măr, în lungul axei acestuia, decât să meargă prin afară, pe suprafaţa mărului, urmând semicercul meridian. Cum fizicienii (se pare că) au întotdeauna simţul umorului, dată fiind şi "plasticitatea" exemplului, acestei structuri care alterează caracterul simplu conex al Universului i s-a dat numele de *wormhole* (adică, gaură de vierme).

Referitor la legătura cu $\Lambda < 0$, calculele arată că, pentru a menţine deschisă şi traversabilă o gaură de vierme, trebuie să injectăm în ea un tip special de materie, de densitate negativă - exact precum $T_{44}[\Lambda < 0]$ - numită, din acest motiv, *exotică.* Din nefericire (pentru curiozitatea şi "gustul de necunoscut" al oamenilor de ştiinţă), deşi posibilă teoretic, tehnologia de "producere industrială" şi de stabilizare a materiei exotice ne este deocamdată (aproape) complet necunoscută.

Al doilea concept, introdus prin anii /60, este cel de *vid degenerat.* Chiar şi din denumire, ne putem da seama de caracterul său neortodox, deoarece în toată Mecanica Cuantică, am învăţat că starea fundamentală a unui sistem este întotdeauna nedegenerată. *Cum poate fi atunci*

starea de vid degenerată ? Sub aspect formal, răspunsul este simplu: *depinde ce înţelegem prin stare de vid.* Dacă ne gândim la aceasta ca la o stare cuantică în care minimul hamiltonianului sistemului, împreună cu valorile (de aşteptare ale) câmpurilor sunt identic nule atunci ea, dacă există, va fi (întotdeauna) nedegenerată.

Ca un exemplu tipic, să luăm cazul câmpului scalar complex liber. Densitatea de lagrangeian este

$$\mathcal{L} = \bar{\phi}^{|a}\phi_{|a} + m_0^2\bar{\phi}\phi\,, \tag{1.138}$$

unde m_0 reprezintă masa cuantelor (de exemplu, pionii $\pi^{\pm}$) acestui câmp. Tensorul conservativ impuls - energie are expresia

$$T_{ab} = \bar{\phi}_{|a}\phi_{|b} + \bar{\phi}_{|b}\phi_{|a} - \eta_{ab}\left[\bar{\phi}^{|c}\phi_{|c} + m_0^2\bar{\phi}\phi\right] \tag{1.139}$$

conducând la densitatea de hamiltonian

$$\mathcal{H} = T_{44} = 2\bar{\phi}_{|4}\phi_{|4} + \left[\delta^{\mu\nu}\bar{\phi}_{|\mu}\phi_{|\nu} - \bar{\phi}_{|4}\phi_{|4} + m_0^2\bar{\phi}\phi\right]\,, \tag{1.140}$$

adică

$$\mathcal{H} = \delta^{ab}\bar{\phi}_{|a}\phi_{|b} + m_0^2\bar{\phi}\phi \tag{1.141}$$

După cum se poate observa, el este pozitiv definit şi realizează minimul la $\bar{\phi}_0 = \phi_0 \equiv 0$, când are valoarea zero. Prin urmare, starea de vid, în sensul de mai sus, este bine definită, fiind într-adevăr, nedegenerată. Această situaţie este tipică tuturor câmpurilor libere, neautointeractive.

Dar ce s-ar întâmpla în cazul câmpurilor libere, autointeractive ? Să luăm, de exemplu, cazul densităţii de lagrangeian

$$\mathcal{L} = \bar{\phi}^{|c}\phi_{|c} - \mu^2\bar{\phi}\phi + \frac{\lambda}{2}(\bar{\phi}\phi)^2 \tag{1.142}$$

a unui scalar complex asemănător primului (m_0^2 este înlocuit cu $-\mu_0^2$), dar self - interactiv prin intermediul unei constante de cuplaj, λ. Tensorul conservativ impuls - energie va avea expresia

$$T_{ab} = \bar{\phi}_{|a}\phi_{|b} + \bar{\phi}_{|b}\phi_{|a} - \eta_{ab}\left[\bar{\phi}^{|c}\phi_{|c} - \mu^2\bar{\phi}\phi + \frac{\lambda}{2}(\bar{\phi}\phi)^2\right] \tag{1.143}$$

şi va conduce la densitatea de hamiltonian, $\mathcal{H} = T_{44}$,

$$\mathcal{H} = \delta^{ab}\bar{\phi}_{|a}\phi_{|b} - \mu^2\bar{\phi}\phi + \frac{\lambda}{2}(\bar{\phi}\phi)^2 \tag{1.144}$$

Decă definim <u>vidul</u> acestei teorii ca fiind starea, sau (după cum vom vedea) stările, în care se realizează <u>minimul</u> lui $\mathcal{H}$ atunci, din condiţiile de extrem

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \bar{\phi}} = 0\,, \tag{1.145}$$

obţinem ecuaţia algebrică

$$(\bar{\phi}\phi)_m = \frac{\mu^2}{\lambda} \tag{1.146}$$

care posedă o infinitate de rădăcini

$$\phi_m = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}e^{i\alpha}$$
$$\bar{\phi}_m = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}e^{-i\alpha} \tag{1.147}$$

cu $\alpha \in R$. Deci, în acest caz, vidul teoriei nu numai că este degenerat, dar ordinul degenerării sale posedă puterea continuumului. Avem, cu alte cuvinte, un sistem fizic a cărui <u>stare de vid</u> este <u>continuu degenerată</u>. Evident, spre deosebire de primul caz, modulul <u>valorii de aşteptare</u> a câmpului în <u>stările</u> sale <u>de vid</u> este <u>pozitiv</u> şi anume,

$$|\phi_m| = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}} \tag{1.148}$$

Calculând acum, componentele tensorului impuls - energie al vidului degenerat găsim că

$$T_{ab}\left[\bar{\phi}\phi)_m\right] = \eta_{ab}\,\frac{\mu^4}{2\lambda} \tag{1.149}$$

şi asemănarea cu $T_{ab}[\Lambda]$ este evidentă pentru

$$\Lambda = -\kappa_0\,\frac{\mu^4}{2\lambda} < 0\ (\text{cu}\ \lambda > 0)$$

Implicaţiile acestui concept în fenomenul "ruperii spontane de simetrie", în teorema Goldstone şi mai ales în vestitul Mecanism Higgs, care stă la baza caracterului finit, renormabil, al tuturor teoriilor gauge contemporane, de unificare (a interacţiunilor din natură), le vom analiza, în capitolul 5, al prezentei lucrări. Acum însă, este cazul "să revenim la oile noastre", adică la ecuaţiile Einstein pentru modelul său de Univers, cu includerea efectivă a "termenului cosmologic". Acestea au forma generală

$$G_{ab} + g_{ab}\Lambda = \kappa_0\rho\,\eta_{a4}\,\eta_{b4}\,, \tag{1.150}$$

care se reduce la sistemul de ecuaţii diferenţiale:

$$\begin{aligned} (f_{|1})^2 - \frac{e^{-2f}}{a^2} &= -\Lambda \\ f_{|11} + (f_{|1})^2 &= -\Lambda \\ 2\,f_{|11} + 3(f_{|1})^2 - \frac{e^{-2f}}{a^2} &= -\Lambda - \kappa_0\rho \end{aligned} \tag{1.151}$$

ce diferă de forma iniţială, (1.134), doar prin adăugarea termenului (cosmologic) "$-\Lambda$" în membrul drept. Cum Λ este constant, avem, sub aspect funcţional, trei ecuaţii diferenţiale cu numai două funcţii necunoscute f şi ρ. Trebuie deci verificată compatibilitatea sistemului. Inmulţind cu 2 a doua ecuaţie şi adunând-o la prima, obţinem

$$2\,f_{|11} + 3(f_{|1})^2 - \frac{e^{-2f}}{a^2} = -3\Lambda \tag{1.152}$$

care trebuie să fie identică, dat fiind că au acelaşi membru stâng, cu a treia ecuaţie, adică, trebuie să avem egalitatea

$$\rho = 2\kappa_0^{-1}\Lambda \tag{1.153}$$

Prin urmare, în Universul Einstein, densitatea volumică de energie a prafului Cosmologic este constantă şi pozitivă, adică indubitabil bine definită (în acord cu teoremele de energie formulate de Hawking şi Ellis), dacă Λ este pozitiv. De aici şi interesul fizic, de ansamblu, în modelele (cosmologice) cu constantă cosmologică pozitivă. Referitor la compatibilitatea primelor două ecuaţii, observăm că, dacă înmulţim a doua ecuaţie cu e^f, obţinem ecuaţia diferenţială liniară, de ordinul doi şi omogenă

$$(e^f)_{|11} + \Lambda e^f = 0\,, \tag{1.154}$$

cu soluţia generală

$$e^f = A \sin\left[\sqrt{\Lambda} r + \alpha\right]\,, \tag{1.155}$$

în care A şi α sunt constante reale. De aici, rezultă

$$f_{|1} = \sqrt{\Lambda} \cot\left[\sqrt{\Lambda} r + \alpha\right]\,, \tag{1.156}$$

astfel încât, înlocuind în prima ecuaţie, ajungem la relaţia

$$\left[\frac{1}{a^2} - \Lambda \cos^2\left[\sqrt{\Lambda} r + \alpha\right]\right] = \Lambda^2 \sin^2\left[\sqrt{\Lambda} r + \alpha\right] \tag{1.157}$$

care poate fi satisfăcută identic (pentru a asigura compatibilitatea), pentru orice $r \in R_+$, dacă şi numai dacă

$$a = \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} \tag{1.158}$$

In aceste condiţii, modelul de Univers propus de Einstein este complet rezolvat analitic şi poate fi sintetizat în metrica

$$ds^2 = (dr)^2 + \frac{1}{\Lambda}\sin^2\left[\sqrt{\Lambda}r + \alpha\right]\left[(d\theta)^2 + \sin^2\theta(d\varphi)^2\right] - (dt)^2 \tag{1.159}$$

şi în valoarea constantă şi omogenă a densităţii prafului cosmologic

$$\rho = \frac{2}{\kappa_0}\Lambda \tag{1.160}$$

Cititorul mai puţin informat, dar maliţios, ar putea întreba *Si pentru două rezultate sărmane, o funcţie metrică armonică şi o densitate constantă, au trebuit efectuate atâtea calcule şi spuse atâtea poveşti?* Ei bine, DA! In primul rând deoarece, chiar dacă ne-am fi gândit de la început asupra unei funcţii metrice armonice ca să asigurăm caracterul constant şi pozitiv definit al invariantului de curbură, $R_{(3)}$, al spaţiului, faptul că parametrul a din metrica iniţială trebuie să fie egal cu $\Lambda^{-1/2}$ nu "iese" decât din ecuaţiile Einstein.

In al doilea rând, faptul că densitatea materiei cosmologice "netezite" nu poate fi decât dublul, prin κ_0, al constantei cosmologice, Λ, nu este deloc evident la prima privire. Ca să întrebăm noi acuma, *de ce nu am putea "pompa" în Univers oricâtă materie vrem?*. Pe baza (fie şi numai a) compatibilităţii sistemului de ecuaţii ale modelului, răspunsul este clar: *fiindcă am distruge caracterul staţionar al bilanţului geometrie - materie, al proceselor prin care "presiunea cosmologică", $-\frac{\Lambda}{\kappa_0}$ şi "densitatea volumică efectivă de energie" , $\rho + \frac{\Lambda}{\kappa_0}$, contribuie la câmpul gravitaţional ce închide, topologic, 3 - suprafeţele spaţiale de timp (universal) constant.*

In fine, în al treilea rând (ca să nu lungim, excesiv, lanţul argumentelor), fiindcă există două consecinţe deosebit de importante ale

modelului, ce nu pot fi deduse decât din rezultatele exacte ale acestuia. Prima parte a prezentării lor fiind comună, le vom separa după aceea.

Să începem prin a calcula energia totală a materiei "netezite", în Universul Einstein. Ea este dată de integrala

$$E = \int \rho \frac{1}{\Lambda} \sin^2(\sqrt{\Lambda} r) \sin\theta \, dr d\theta d\varphi \tag{1.161}$$

Factorul de fază α nu joacă nici un rol, de aceea l-am fixat la zero, iar pentru ca sinusul (din e^f) să fie pozitiv, coordonata de tip radial r trebuie să ia valori în intervalul $\left[0, \frac{\pi}{\sqrt{\Lambda}}\right]$. Cum totul este independent de unghiul solid $\Omega = \int \sin\theta \, d\theta d\varphi = 4\pi$, rezultă pentru E expresia (după calcularea integralei)

$$E = \frac{4\pi^2}{\kappa_0} \Lambda^{-1/2} \tag{1.162}$$

care conduce la masa materiei ordinare din Universul Einstein, $M = \frac{E}{c^2}$,

$$M = \frac{\pi}{2} \frac{c^2}{G} \Lambda^{-1/2} \tag{1.163}$$

Aici apar două consecinţe:

(i) Dat fiind că neutronii liberi nu sunt stabili, iar electronii sunt mult mai uşori decât protonii, putem considera praful cosmologic ca fiind alcătuit "sub aspectul ponderalităţii sale" din nuclee de hidrogen. Ca urmare, putem evalua numărul protonilor din Univers prin simpla relaţie $N_p = M m_p^{-1}$, obţinând

$$N_p = \frac{\pi c^2}{2G} \frac{\Lambda^{-1/2}}{m_p} \approx 10^{80}, \tag{1.164}$$

pentru o valoare rezonabilă, $\Lambda \approx 10^{-51}\,\mathrm{m}^{-2}$, a constantei cosmologice. Deşi pare grosier ca justificare, acest rezultat, obţinut pentru prima oară (şi justificat printr-o metodă independentă) de Eddington, în 1921, şi reconfirmat, din nou cu totul independent, de

Dicke, prin anii '60, este utilizat şi astăzi, în modele cosmologice deosebit de sofisticate, la explicarea entropiei extrem de mari a Universului nostru.

(ii) Estimând grosier, dar în acord cu observaţiile de scară largă, masa tipică a unei galaxii, la $M_G = 10^{41} \div 10^{42}$ kg, formula de masă prezisă de modelul Einstein conduce direct la o estimare a numărului de galaxii din Univers (sau din partea observabilă a acestuia) de circa $10^{10} \div 10^{12}$ cu o medie geometrică de

$$N_G \sim 10^{11}\ (galaxii)$$

Chiar dacă asupra acestei valori "se poate discuta", să nu uităm că ea a fost obţinută acum mai bine de 70 de ani, când astronomii abia îndrăzneau să viseze la "cam câte galaxii ar fi în Univers, dacă acesta este finit, dar nelimitat, asemeni unei sfere". Mai mult decât atât, faptul că $r_{max} = \pi\Lambda^{-1/2}$, după cum rezultă din soluţia exactă propusă de Einstein, a dat un răspuns remarcabil la o altă întrebare, cel puţin fizic (ca să nu spunem "metafizic") fundamentală, *cam cât de mare ar fi Universul nostru?*. Cu Λ în intervalul rezonabil, $10^{-52} \div 10^{-50}$ (m^{-2}), răspunsul lui Einstein a fost destul de clar: *în jur de 10^{26} m, adică de cam 10 miliarde de ani lumină*.

Continuă şi astăzi să fie surprinzător acest rezultat,prin simplitatea modelului din care a fost obţinut, când cele mai recente date de scară foarte largă, coroborate cu cel mai modern model cosmologic, aşa numitul "Univers Inflaţionist", dau o valoare de $12 \div 13$ miliarde ani lumină. . . .

In fine, să mai analizăm un singur aspect. *Dacă am avea "puteri paranormale", astfel încât să putem "ieşi" din cadrul celor patru dimensiuni spaţio - temporale, pe cel puţin o extra-dimensiune, cum am "vedea" Universul Einstein ?*

Pentru a răspunde, introducem coordonata

$$\chi = \sqrt{\Lambda}\, r \in [0, \pi] \tag{1.165}$$

care aduce metrica la forma

$$ds^2 = \frac{1}{\Lambda}\left\{(d\chi)^2 + \sin^2\chi\left[(d\theta)^2 + \sin^2\theta\,(d\varphi)^2\right]\right\} - (dt)^2 \tag{1.166}$$

Cum timpul este ortogonal şi plat, iar Λ^{-1} fixează doar pătratul scării dimensiunilor spaţiale, putem să ne concentrăm asupra varietăţii $3D$, descrisă de metrica

$$ds^2 = (d\chi)^2 + \sin^2\chi(d\theta)^2 + \sin^2\chi\,\sin^2\theta(d\varphi)^2\,, \tag{1.167}$$

cu $(\chi, \theta, \varphi) \in (0, \pi) \times (0,\pi) \times (0, 2\pi)$. Să adunăm şi să scădem, în membrul drept, termenul $\cos^2\chi(d\chi)^2$. Obţinem

$$dl^2 = \sin^2\chi(d\chi)^2 + (d\sin\chi)^2 + \sin^2\chi\, d\Omega^2\,,\ \text{cu } d\Omega^2 = (d\theta)^2 + \sin^2\theta(d\varphi)^2 \tag{1.168}$$

Dar, notând cu $R = \sin\chi$ noua coordonată radială, observăm că ultimii doi termeni din dreapta reprezintă metrica spaţiului euclidian R^3, în coordonate sferice:

$$(dX)^2 + (dY)^2 + (dZ)^2 = (dR)^2 + R^2\, d\Omega^2 \tag{1.169}$$

unde, evident,

$$\begin{aligned} X &= R\sin\theta\cos\varphi \\ Y &= R\sin\theta\sin\varphi \\ Z &= R\cos\theta \end{aligned} \tag{1.170}$$

sunt coordonatele carteziene (din R^3). Astfel, metrica dl^2 se poate scrie sub forma

$$dl^2 = (dX)^2 + (dY)^2 + (dZ)^2 + (dW)^2 \qquad (1.171)$$

cu

$$W = \cos\chi \qquad (1.172)$$

ca a patra coordonată de gen spaţial, indicând clar că este vorba de scufundarea unei varietăţi V_3, de coordonate locale (χ, θ, φ) într-un spaţiu euclidian abstract, R^4, de coordonate (globale) (X, Y, Z, W), prin parametrizarea

$$\begin{aligned} X &= \sin\chi \sin\theta \cos\varphi \\ Y &= \sin\chi \sin\theta \sin\varphi \\ Z &= \sin\chi \cos\theta \\ W &= \cos\chi \end{aligned} \qquad (1.173)$$

După cum se observă imediat, aceasta conduce la ecuaţia de definire implicită a 3 - suprafeţei V_3, anume

$$X^2 + Y^2 + Z^2 + W^2 = 1 ,$$

astfel încât, este vorba de sfera tridimensională unitate S^3. Cum diferenţa dintre numărul dimensiunilor spaţiului de scufundare şi cel al dimensiunilor varietăţii scufundate este $4-3$, Universul Einstein are clasa de scufundare $s = 1$. Adăugând acum şi dimensiunea de gen temporal

$$T = t \in R$$

obţinem un spaţiu euclidian, R^5, de signatură $\sigma_{(5)} = 4-1 = 3$ şi metrică (plată)

$$ds^2 = (dX)^2 + (dY)^2 + (dZ)^2 + (dW)^2 - (dT)^2 \qquad (1.174)$$

în care tot Universul Einstein, de signatură $\sigma_{(4)} = 3 - 1 = 2$ şi metrică

$$ds^2 = \Lambda^{-1}\{(d\chi)^2 + \sin^2\chi\, d\Omega^2\} - (dt)^2 \tag{1.175}$$

este scufundat prin parametrizarea

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} \sin\chi \sin\theta \cos\varphi \\ Y &= \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} \sin\chi \sin\theta \sin\varphi \\ Z &= \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} \sin\chi \cos\theta \\ W &= \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} \cos\chi \\ T &= t \end{aligned} \tag{1.176}$$

având forma unui cilindru (drept), ridicat pe direcţia temporală, cu secţiune transversală ($T = const$) sferică tridimensională, de rază $\Lambda^{-1/2}$. Topologia $S^3 \times R$ a acestui Univers este acum evidentă.

1.3 Geometrie $S^3 \times R$

Realizarea de extensiuni moderne ale Teoriei Relativităţii Generale se poate face printr-o reformulare a acesteia în termenii teoriei fibratelor. In lucrarea [6], asupra căreia nu vom insista în cadrul acestei cărţi, am construit fibratul principal al modelului, cu varietatea de bază $M = \Sigma^3 \times R$ şi cu un grup structural, compact, n - dimensional. Lagrangeianul este determinat de curbura scalară a legii de derivare compatibile cu metrica pseudoriemanniană pe spaţiul total al fibratului principal.

Obiectivul nostru fiind dezvoltarea unor teorii de câmp, pe varietatea $S^3 \times R$, în scopul geometrizării principalelor surse materiale, este indicat să ne oprim puţin asupra geometriei acestei varietăţi.

Definind sfera S^3 ca în (1.53) şi utilizând parametrizarea

$$
\begin{aligned}
x_1 &= a \cos\alpha \cos\theta \\
x_2 &= a \sin\alpha \cos\theta \\
x_3 &= a \cos\beta \sin\theta \\
x_4 &= a \sin\beta \sin\theta
\end{aligned} \tag{1.177}
$$

cu

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\
0 &\leq \alpha, \beta \leq 2\pi
\end{aligned} \tag{1.178}
$$

vom ajunge la metrica

$$
d\sigma^2 = a^2 \left[\cos^2\theta(d\alpha)^2 + \sin^2\theta(d\beta)^2 + (d\theta)^2\right] \tag{1.179}
$$

Câmpurile $\{X_1, X_2, X_3\}$, tangente la sfera S^3 şi definite prin (1.54), se vor scrie în baza locală $\{\partial_\alpha, \partial_\beta, \partial_\theta\}$, sub forma

$$
\begin{aligned}
e_1 &= \frac{1}{a}X_1 = \frac{1}{a}[\cos(\alpha+\beta)(\tan\theta\partial_\alpha - \cot\theta\partial_\beta) - \sin(\alpha+\beta)\partial_\theta] \\
e_2 &= \frac{1}{a}X_2 = \frac{1}{a}[\sin(\alpha+\beta)(\tan\theta\partial_\alpha - \cot\theta\partial_\beta) + \cos(\alpha+\beta)\partial_\theta] \\
e_3 &= \frac{1}{a}X_3 = \frac{1}{a}(-\partial_\alpha + \partial_\beta)
\end{aligned} \tag{1.180}
$$

şi satisfac algebra

$$
[e_\mu, e_\nu] = \frac{2}{a}\varepsilon_{\mu\nu\rho}e_\rho \,, \; \mu, \nu, \rho = \overline{1,3} \tag{1.181}
$$

Baza duală corespunzătoare acestei bazei rigide va fi

$$\begin{aligned} \omega^1 &= \frac{a}{2}\cos(\alpha+\beta)\,\sin(2\theta)(d\alpha - d\beta) - a\sin(\alpha+\beta)d\theta \\ \omega^2 &= \frac{a}{2}\sin(\alpha+\beta)\,\sin(2\theta)(d\alpha - d\beta) + a\cos(\alpha+\beta)d\theta \\ \omega^3 &= -a\left(\cos^2\theta d\alpha + \sin^2\theta d\beta\right) \end{aligned} \tag{1.182}$$

Pentru început, să considerăm cazul static, descris de metrica lorentziană

$$ds^2 = d\sigma^2 - dt^2 \tag{1.183}$$

şi să introducem reperul tetradic $\{e_a\}_{a=\overline{1,4}}$, cu

$$e_4 = \partial_4 \tag{1.184}$$

şi respectiv, baza duală $\{\omega^a\}_{a=\overline{1,4}}$, cu

$$\omega^4 = dt \tag{1.185}$$

In acest caz, algebra Lie satisfăcută de vectorii bazei se poate scrie sub forma sugestivă

$$[e_b, e_c] = \frac{2}{a}\varepsilon_{4\,bc}^{\;\;\;d} e_d \tag{1.186}$$

unde ε_{4bcd} este tensorul antisimetric de rang 4, cu $\varepsilon_{4123} = 1$. Comparând această relaţie cu (1.5), vom identifica constantele de structură ca fiind

$$C_{bcd} = \frac{2}{a}\varepsilon_{4bcd} \tag{1.187}$$

adică, cele corespunzătoare algebrei Lie a grupului $SU(2) \times T$, unde T este grupul translaţiilor temporale.

Definim metrica riemanniană a varietăţii, cu ajutorul lui (1.78), în care se înlocuieşte baza locală $\{\partial_i\}_{i=\overline{1,m}}$, cu baza rigidă $\{e_a\}_{a=\overline{1,4}}$ şi avem

$$g_{ab} = g(e_a, e_b) = diag(1, 1, 1, -1) = \eta_{ab} \tag{1.188}$$

Mai departe, simbolurile lui Christoffel se obţin din (1.93) ca fiind

$$\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = \frac{1}{a} g^{\rho\sigma} \left(\varepsilon_{\sigma\nu\mu} + \varepsilon_{\mu\sigma\nu} - \varepsilon_{\nu\mu\sigma} \right) , \ \mu, \nu, \sigma = \overline{1,3} \tag{1.189}$$

1-formele de conexiune, definite prin (1.71), sunt

$$\begin{aligned} \Gamma^{1}_{\ 2} &= -\frac{1}{a}\omega^{3} \\ \Gamma^{2}_{\ 3} &= -\frac{1}{a}\omega^{1} \\ \Gamma^{3}_{\ 1} &= -\frac{1}{a}\omega^{2} \\ \Gamma^{4}_{\ \mu} &= -\Gamma^{\mu}_{\ 4} = 0 , \ \mu = \overline{1,3} \end{aligned} \tag{1.190}$$

iar componentele esenţiale ale tensorului Riemann, (1.88),

$$R_{1212} = R_{1313} = R_{2323} = \frac{1}{a^2} \tag{1.191}$$

ne permit să calculăm tensorul Ricci

$$\begin{aligned} R_{11} &= R_{22} = R_{33} = \frac{2}{a^2} \\ R_{44} &= 0 \end{aligned} \tag{1.192}$$

şi curbura scalară, (1.91),

$$R = \frac{6}{a^2} \tag{1.193}$$

care, pentru sfera de rază unitate, devine

$$R = 6 \tag{1.194}$$

1.4 Cosmologii Robertson - Walker

In continuare, vom revedea modelele cosmologice Friedman - Robertson - Walker (FRW), având curbura spaţială constantă şi pozitivă, în termeni de teoria grupurilor, exploatând simetria $O(4)$ a hipersuprafeţelor *spacelike* S^3, a cărei algebră Lie este $SU(2) \times SU(2)$.

Dinamizând metrica (1.183), vom găsi două soluţii exacte, ale ecuaţiilor Einstein, cea corespunzătoare unei radiaţii termice izotrope şi cea de praf (incoherent dust), caracterizând spaţiu - timpul FRW actual, cu conţinut de materie barionică [7].

Vom generaliza relaţiile obţinute în paragraful anterior, pentru cazul în care raza a este o funcţie de timp, adică

$$a = f(t) \tag{1.195}$$

Astfel, constantele de structură, (1.187), devin

$$\begin{aligned} C_{\mu\nu\rho} &= \frac{2}{f}\varepsilon_{\mu\nu\rho} \\ C_{\mu\mu 4} &= -C_{\mu 4\mu} = \frac{f\prime}{f} \\ C_{4\mu\mu} &= 0 \end{aligned} \tag{1.196}$$

unde cu $\prime$ am marcat derivatele temporale.

Utilizând prima ecuaţie Cartan, în absenţa torsiunii, (1.115), obţinem coeficienţii de conexiune

$$\begin{aligned} \Gamma^{\rho}_{\mu\nu} &= -\frac{1}{f}\varepsilon^{\rho}_{\mu\nu} \\ \Gamma^{\mu}_{4\mu} &= \Gamma^{4}_{\mu\mu} = \frac{f\prime}{f} \\ \Gamma^{\mu}_{\mu 4} &= 0 \end{aligned} \tag{1.197}$$

iar, din a doua ecuaţie Cartan (1.74), vom avea următoarele componente ale tensorului Riemann

$$R_{1212} = R_{1313} = R_{2323} = \frac{1}{f^2} + \left(\frac{f\prime}{f}\right)^2$$

$$R_{1414} = R_{2424} = R_{3434} = -\frac{f\prime\prime}{f^2} \tag{1.198}$$

care ne vor permite să calculăm tensorul Ricci

$$R_{11} = R_{22} = R_{33} = \frac{2}{f^2} + \frac{f\prime\prime}{f} + 2\left(\frac{f\prime}{f}\right)^2$$

$$R_{44} = -3\frac{f\prime\prime}{f} \tag{1.199}$$

şi curbura scalară

$$R = \eta^{ab} R_{ab} = 6\left[\frac{1}{f^2} + \frac{f\prime\prime}{f} + \left(\frac{f\prime}{f}\right)^2\right] \tag{1.200}$$

Evident, pentru $f(t) = a = const.$, vom obţine relaţiile din paragraful anterior.

In sfârşit, componentele tensorului Einstein (1.125), au forma concretă

$$G_{\mu\mu} = -\left[\frac{1}{f^2} + 2\frac{f\prime\prime}{f} + \left(\frac{f\prime}{f}\right)^2\right]$$

$$G_{44} = \frac{3}{f^2}(1 + f\prime^2) \tag{1.201}$$

Considerăm, în ecuaţiile Einstein

$$G_{ab} = kT_{ab} ,$$

tensorul impuls - energie - materie corespunzător unui fluid ideal, adică

$$T_{ab} = (w + p)u_a u_b + p\eta_{ab} \tag{1.202}$$

unde p reprezintă presiunea, iar w este densitatea de energie. Forma concretă a componentelor tensorului Einstein ne sugerează utilizarea relaţiei bine - cunoscute $w = 3p$, astfel încât fluidul ideal poate fi identificat cu un câmp electromagnetic de radiaţie pură, aducându-l pe (1.202) la

$$T_{ab} = \frac{w}{3}\left(4\delta_a^4\delta_b^4 + \eta_{ab}\right) \tag{1.203}$$

Cu acestea, ecuaţiile Einstein capătă forma concretă

$$\begin{aligned} \frac{1}{f^2} + 2\frac{f''}{f} + \left(\frac{f'}{f}\right)^2 &= -\frac{kw}{3} \\ \frac{3}{f^2}(1 + f'^2) &= kw \end{aligned} \tag{1.204}$$

conducând la următoarea ecuaţie diferenţială pentru funcţia f

$$f''f + f'^2 + 1 = 0 \tag{1.205}$$

cu soluţia generală

$$f(t) = \sqrt{a^2 - (b \pm t)^2} \tag{1.206}$$

unde a, b sunt constante de integrare. Inlocuind această soluţie în (1.204), vom obţine densitatea de energie corespunzătoare câmpului electromagnetic al radiaţiei pure

$$w = \frac{3a}{k}\left[a^2 - (b \pm t)^2\right]^{-2} \tag{1.207}$$

Pentru comparaţie, este util să analizăm şi cazul cel mai simplu, corespunzător prafului cosmologic, al cărui tensor impuls - energie

$$T_{ab} = w u_a u_b \tag{1.208}$$

obţinut din expresia (1.202), pentru $p = 0$, posedă, în raport cu reperul comobil $u_\mu = 0$, o singură componentă nenulă şi anume

$$T_{44} = w \tag{1.209}$$

In aceste ipoteze, pentru ecuaţiile Einstein

$$\frac{1}{f^2} + 2\frac{f''}{f} + \left(\frac{f'}{f}\right)^2 = 0$$

$$\frac{3}{f^2}(1 + f'^2) = kw \qquad (1.210)$$

soluţia generală este exprimată prin dependenţa transcendentă a razei sferei de timp, ca

$$t = t_0 \mp \left[c\sqrt{\frac{f}{c}\left(1 - \frac{f}{c}\right)} + \frac{\sqrt{c}}{2}\arcsin\sqrt{1 - \frac{f}{c}}\right] \qquad (1.211)$$

unde t_0 şi c sunt constante de integrare.

La o primă privire, relaţia anterioară ne furnizează două cazuri particulare, de interes.

- primul, corespunzând lui $f << c$, conduce la dependenţa pătratică de timp

$$f(t) = (at + b)^2 \,,\; a > 0 \qquad (1.212)$$

- în timp cel al doilea, corespunzând lui $f \approx c$, ne dă o descreştere în timp a razei, adică

$$f(t) = a - b^2(t - t_0)^2 \qquad (1.213)$$

De asemenea, din a doua ecuaţie (1.210) se obţine densitatea energetică

$$w = \frac{3c}{kf^3} \qquad (1.214)$$

Aşa cum este de aşteptat, deoarece, în ambele cazuri analizate mai sus, tensorul impuls - energie - putere satisface condiţia energetică tare Hawking - Ellis, modelele FRW analizate posedă o evoluţie Big - Bang.

Bibliografie

[1] DeWitt, B.S., 1963, în *Dynamical Theory of Groups and Fields*, 1963 Les Houches Summer School.

[2] Gheorghiev, G., şi Oproiu, V., 1977, *Geometrie Diferenţială*, Bucureşti: Ed. Didactică şi Pedagogică.

[3] Ianuş, S., 1983, *Geometrie Diferenţială cu Aplicaţii în Teoria Relativităţii*, Bucureşti: Ed. Acad. R.S.R.

[4] Kobayashi, S., and , Nomizu, K., 1963, *Foundations of Differential Geometry*, New York: Interscience Publ.

[5] Miron, R., şi Anastasiei, M., 1987, *Fibrate Vectoriale. Spaţii Lagrange. Aplicaţii în Teoria Relativităţii*, Bucureşti: Ed. Acad. R.S.R.

[6] Zet, G., Dariescu, C., and Dariescu, M.A., 1993, *TENSOR N.S.* **52**, 14.

[7] Dariescu, C., and Dariescu, M.A., 1995, *Rom. Astron. J.* **5**, 55.

Cuprins

2 GEOMETRODINAMICA $S^3 \times R$ A CAMPULUI SCALAR COMPLEX **63**

2.1 Teoria $SO(3,1) \times U(1)$ - gauge invariantă a scalarului complex în Universul Einstein 63

2.1.1 Stările de vid electromagnetic. Masa câmpului scalar complex 67

2.2 Cuantificarea câmpului scalar complex pe varietăţi spaţio - temporale cu timp ortogonal şi 3 - suprafeţe compacte . 73

2.3 Procedeul de cuantificare pe $S^3 \times R$ 80

Capitolul 2

GEOMETRODINAMICA $S^3 \times R$ A CAMPULUI SCALAR COMPLEX

2.1 Teoria $SO(3,1) \times U(1)$ - gauge invariantă a scalarului complex în Universul Einstein

In acest paragraf, vom introduce integrala acţiunii pentru sistemul fizic $U(1)$ - gauge invariant, cu sursă materială de tip scalar complex, în prezenţa gravitaţiei. Aplicând principiul acţiunii staţionare, este obţinut setul complet de ecuaţii Klein - Gordon - Maxwell - Einstein pe varietatea $S^3 \times R$, care va fi apoi integrat în cazul modurilor longitudinale ale câmpului electromagnetic [1].

Pentru o varietate spaţio-temporală curbă M, pe care s-a definit un câmp sclar complex ϕ, funcţionala $U(1)$ - gauge invariantă a acţiunii,

pentru sistemul considerat, are expresia binecunoscută [2] :

$$S = \int \mathcal{L}_{(g)}\, d\Omega + \int \mathcal{L}_{(m)}\, d\Omega + \int \mathcal{L}_{(em)}\, d\Omega \tag{2.1}$$

cu

$$d\Omega = -\sqrt{-g}\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4 \tag{2.2}$$

Densităţile de lagrangeieni corespunzătoare sunt:

$$\begin{aligned} a) \quad & \mathcal{L}_{(g)} = -\frac{1}{2\kappa_0}(R - 2\Lambda) \\ b) \quad & \mathcal{L}_{(m)} = g^{\mu\nu}\overline{D_\mu \phi} D_\nu \phi + m_0^2 \overline{\phi}\phi \\ c) \quad & \mathcal{L}_{(em)} = \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \end{aligned} \tag{2.3}$$

unde $\kappa_0 = 8\pi$ este constanta lui Einstein exprimată în unităţi naturale, Λ este constanta cosmologică, iar D_μ este derivata covariantă pentru grupul gauge $U(1)$, adică

$$D_\mu = \nabla_\mu - ieA_\mu \tag{2.4}$$

Cu ∇_μ s-a notat derivata covariantă uzuală Levi-Civita

$$\nabla_\mu U^{\alpha\cdots\beta}_{\gamma\cdots\rho} \equiv U^{\alpha\cdots\beta}_{\gamma\cdots\rho;\mu} = \tag{2.5}$$

$$= e_\mu U^{\alpha\cdots\beta}_{\gamma\cdots\rho} + U^{\nu\cdots\beta}_{\gamma\cdots\rho}\Gamma^{\alpha}_{\nu\mu} + \cdots U^{\alpha\cdots\nu}_{\gamma\cdots\rho}\Gamma^{\beta}_{\nu\mu} - U^{\alpha\cdots\beta}_{\nu\cdots\rho}\Gamma^{\nu}_{\gamma\mu} - \cdots U^{\alpha\cdots\beta}_{\gamma\cdots\nu}\Gamma^{\nu}_{\rho\mu}$$

Asupra componentelor $F_{\mu\nu}$ ale câmpului electromagnetic vom insista în capitolul următor, dedicat studiul acestuia.

Se aplică principiul minimei acţiuni, în raport cu câmpurile ϕ , $\overline{\phi}$, A^μ, $g_{\mu\nu}$, considerate ca variabile canonice independente. Astfel, din

$$\begin{aligned} \delta_{\overline{\phi}} S &= 0 \\ \delta_\phi S &= 0 \end{aligned} \tag{2.6}$$

se obţin ecuaţiile Klein-Gordon:

$$a)\quad D_\mu(D^\mu\phi) - m_0^2\phi = 0$$

$$b)\quad \overline{D_\mu(D^\mu\phi)} - m_0^2\overline{\phi} = 0 \qquad (2.7)$$

care, după explicitarea derivatei covariante (2.4), devin

$$a)\quad g^{\mu\nu}\phi_{;\mu\nu} - (m_0^2 + e^2A^\mu A_\mu)\phi = 2ieA^\mu e_\mu\phi$$

$$b)\quad g^{\mu\nu}\overline{\phi}_{;\mu\nu} - (m_0^2 + e^2A^\mu A_\mu)\overline{\phi} = -2ieA^\mu e_\mu\overline{\phi} \qquad (2.8)$$

Din

$$\delta_A S = 0 \qquad (2.9)$$

se obţin ecuaţii Maxwell cu surse scalare

$$\nabla_\nu F_\mu^{\ \nu} = -ie[\overline{\phi}(D_\mu\phi) - (\overline{D_\mu\phi})\phi] \qquad (2.10)$$

care se scriu, explicit, sub forma

$$\nabla_\nu F_\mu^{\ \nu} = -ie[\overline{\phi}(e_\mu\phi) - (e_\mu\overline{\phi})\phi] - 2e^2A_\mu\overline{\phi}\phi \qquad (2.11)$$

In sfârşit,

$$\delta_g S = 0 \qquad (2.12)$$

ne furnizează ecuaţiile Einstein cu constantă cosmologică

$$G_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\Lambda = \kappa_0 T_{\mu\nu} \qquad (2.13)$$

unde, tensorul energie-impuls [n.b.]

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}}[\sqrt{-g}\left(\mathcal{L}_{(m)} + \mathcal{L}_{(em)}\right)] \qquad (2.14)$$

are forma explicită

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= (\overline{D_\mu\phi})(D_\nu\phi) + (\overline{D_\nu\phi})(D_\mu\phi) - g_{\mu\nu}(\overline{D^\sigma\phi}D_\sigma\phi + m_0^2\overline{\phi}\phi) + \\ &+ F_\mu^{\ \rho}F_{\nu\rho} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F^{\rho\gamma}F_{\rho\gamma} \end{aligned} \tag{2.15}$$

Rezultatele prezentate mai sus, obţinute pentru o varietate spaţio-temporală curbă (M, g), vor fi în continuare particularizate, utilizând relaţiile introduse în capitolul I, la cazul varietăţii spaţio-temporale $S^3 \times R$. Astfel,

- ecuaţiile (2.8) devin:

$$\begin{aligned} &a) \quad \Delta\phi - \partial_t^2\phi - (m_0^2 + e^2A^\mu A_\mu)\phi = 2ieA^\mu e_\mu\phi \\ &b) \quad \Delta\overline{\phi} - \partial_t^2\overline{\phi} - (m_0^2 + e^2A^\mu A_\mu)\overline{\phi} = -2ieA^\mu e_\mu\overline{\phi} \end{aligned} \tag{2.16}$$

- ecuaţiile Maxwell cu surse scalare (2.11) capătă forma

$$\begin{aligned} &a) \quad e_jF_{ij} - e_4F_{i4} - \varepsilon_{ijk}F^{jk} = -ie(\overline{\phi}\, e_i\phi - e_i\overline{\phi}\, \phi) - 2e^2A_i\overline{\phi}\phi \\ &b) \quad e_iF_{4i} = -ie(\overline{\phi}\, e_4\phi - e_4\overline{\phi}\, \phi) - 2e^2A_4\overline{\phi}\phi \end{aligned} \tag{2.17}$$

unde, tensorul câmpului electromagnetic $F_{\mu\nu}$ are componentele [3,4,5]

$$\begin{aligned} F_{ij} &= e_iA_j - e_jA_i - 2\varepsilon_{ijk}A^k \\ F_{i4} &= e_iA_4 - e_4A_i \end{aligned} \tag{2.18}$$

- iar ecuaţiile Einstein cu constantă cosmologică sunt:

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{a^2}+\Lambda &= \kappa_0[2\overline{D_1\phi}D_1\phi-(\overline{D^\mu\phi}D_\mu\phi+m_0^2\overline{\phi}\phi)]+\\
&+ F_1{}^\mu F_{1\mu}-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\\
-\frac{1}{a^2}+\Lambda &= \kappa_0[2\overline{D_2\phi}D_2\phi-(\overline{D^\mu\phi}D_\mu\phi+m_0^2\overline{\phi}\phi)]+\\
&+ F_2{}^\mu F_{2\mu}-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\\
-\frac{1}{a^2}+\Lambda &= \kappa_0[2\overline{D_3\phi}D_3\phi-(\overline{D^\mu\phi}D_\mu\phi+m_0^2\overline{\phi}\phi)]+\\
&+ F_3{}^\mu F_{3\mu}-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\\
\frac{3}{a^2}-\Lambda &= \kappa_0[2\overline{D_4\phi}D_4\phi+(\overline{D^\mu\phi}D_\mu\phi+m_0^2\overline{\phi}\phi)]+\\
&+ F_4{}^\mu F_{4\mu}+\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\\
0 &= \overline{D_i\phi}D_j\phi+\overline{D_j\phi}D_i\phi+F_i{}^\mu F_{j\mu} \quad i,j=1,2,3\,;\ i\neq j\\
0 &= \overline{D_i\phi}D_4\phi+\overline{D_4\phi}D_i\phi+F_i{}^\mu F_{4\mu} \qquad (2.19)
\end{aligned}
$$

Sistemul (2.16 - 19), ce descrie dinamica sistemului fizic, reprezintă setul de ecuaţii Klein - Gordon - Maxwell - Einstein, de a cărui integrare, pentru cazul modurilor longitudinale ale câmpului vectorial, ne vom ocupa în cele ce urmează.

2.1.1 Stările de vid electromagnetic. Masa câmpului scalar complex

Datorită curburii varietăţii spaţio-temporale, spectrul modurilor transversale şi longitudinale este diferit [6].

Pentru modurile longitudinale, ce permit o caracterizare netrivială a stărilor de vid electromagnetic, sunt valabile relaţiile:

$$\begin{aligned} a)\quad & F_{ij} = e_i A_j - e_j A_i - 2\varepsilon_{ijk} A^k = 0 \\ b)\quad & F_{i4} = e_i A_4 - e_4 A_i = 0 \end{aligned} \tag{2.20}$$

care, înlocuite în ecuaţiile Maxwell cu surse scalare (2.17.a,b), ne conduc la componentele potenţialului A_μ de forma

$$\begin{aligned} a)\quad & A_i = -\frac{i}{2e}(\overline{\phi}\phi)^{-1}(\overline{\phi}(e_i\phi) - (e_i\overline{\phi})\phi) \\ b)\quad & A_4 = -\frac{i}{2e}(\overline{\phi}\phi)^{-1}(\overline{\phi}(e_4\phi) - (e_4\overline{\phi})\phi) \end{aligned} \tag{2.21}$$

Considerând acum câmpul scalar complex ϕ descris de funcţiile reale F şi G

$$\begin{aligned} a)\quad & \phi = F\exp(iG) \\ b)\quad & \overline{\phi} = F\exp(-iG)\,, \end{aligned} \tag{2.22}$$

adică componentele lui A_μ de forma

$$\begin{aligned} a)\quad & A_i = \frac{1}{e}e_i G \\ b)\quad & A_4 = \frac{1}{e}e_4 G\,, \end{aligned} \tag{2.23}$$

se obţin, prin înlocuire în ecuaţiile Klein-Gordon (2.16.a,b), următoarele ecuaţii de câmp pentru funcţiile reale F şi G:

$$\begin{aligned} a)\quad & \Delta F - \partial_t^2 F - m_0^2 F = 0 \\ b)\quad & \Delta G - \partial_t^2 G = 0 \end{aligned} \tag{2.24}$$

unde s-a notat cu Δ laplaceianul pe varietatea S^3, adică

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + 2\cot(2\theta)\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\cos^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2} \tag{2.25}$$

In sfârşit, sistemul de ecuaţii Einstein (2.19) devine:

$$
\begin{aligned}
&a) \quad -\frac{1}{a^2} + \Lambda = \kappa_0[2\, e_{\underline{i}}F\, e_{\underline{i}}F - (e_\mu F\, e^\mu F + m_0^2 F^2)] \\
&b) \quad \frac{3}{a^2} + \Lambda = \kappa_0[2\, e_i\, F e_i F + (e_4 F)^2 + m_0^2 F^2] \\
&c) \quad e_i F\, e_j F = 0 \\
&d) \quad e_i\, F e_4 F = 0
\end{aligned} \tag{2.26}
$$

unde nu se sumează după $\underline{i} = 1,2,3$. Ecuaţiile (2.26.c,d) implică restricţiile

$$
e_i F = 0 \ ; \ i = 1,2,3 \tag{2.27}
$$

Deci, sistemul final pentru funcţiile necunoscute F şi G va fi

$$
\begin{aligned}
&a) \quad \partial_t^2 F + m_0^2 F = 0 \\
&b) \quad \Delta G - \partial_t^2 G = 0 \\
&c) \quad (\partial_t F)^2 - m_0^2 F^2 = -\frac{1}{\kappa_0}\left(\frac{1}{a^2} - \Lambda\right) \\
&d) \quad (\partial_t F)^2 + m_0^2 F^2 = \frac{1}{\kappa_0}\left(\frac{3}{a^2} - \Lambda\right)
\end{aligned} \tag{2.28}
$$

Soluţia pentru G de forma

$$
G = \mathcal{G}(\theta) + \mathcal{A}(\alpha) + \mathcal{B}(\beta) + \mathcal{T}(t) \tag{2.29}
$$

pentru care modul longitudinal fundamental al lui A_μ este obţinut prin înlocuirea laplaceianului (2.25) în (2.28.b) şi impunând

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2\mathcal{G}}{d\theta^2} + 2\cot(2\theta)\frac{d\mathcal{G}}{d\theta} &= 0 \\
\frac{d^2\mathcal{A}}{d\alpha^2} &= 0 \\
\frac{d^2\mathcal{B}}{d\beta^2} &= 0 \\
\frac{d^2\mathcal{T}}{dt^2} &= 0\,,
\end{aligned} \tag{2.30}
$$

capătă expresia

$$G = \frac{k}{2}\ln(\tan\theta) + n_1\alpha + n_2\beta - Et\,, \tag{2.31}$$

unde $k, E \in R$ şi $n_1, n_2 \in Z$.

In continuare, vom calcula fluxul magnetic folosind o curbă închisă, cu punctul de plecare $(\theta_0,\ \alpha_0,\ \beta_0)$ şi cu punctul final $(\theta_0,\ \alpha_0+2\pi,\ \beta_0+2\pi)$, cu ajutorul relaţiei uzuale

$$\varphi = \oint A_i\omega^i \tag{2.32}$$

şi vom obţine

$$\varphi = \frac{1}{e}[G(\theta_0,\ \alpha_0+2\pi,\ \beta_0+2\pi,\ t) - G(\theta_0,\ \alpha_0,\ \beta_0,\ t)] \tag{2.33}$$

care ne va conduce la următoarea cuantificare geometrică, naturală, a fluxului magnetic, pe spaţiu-timpul $S^3 \times R$

$$\varphi = \frac{2\pi}{e}(n_1 + n_2) \tag{2.34}$$

In sistemul (2.28), ecuaţia (2.28.a) admite soluţia

$$F = F_0 \sin(m_0 t + \xi_0) \tag{2.35}$$

care reduce ecuaţiile (2.28.c,d) la forma concretă

$$\begin{aligned} a)\quad & \frac{1}{a^2} - \Lambda = -\kappa_0 m_0^2 F_0^2 \cos(2m_0 t + 2\xi_0) \\ b)\quad & \frac{3}{a^2} - \Lambda = \kappa_0 m_0^2 F_0^2 \end{aligned} \tag{2.36}$$

Aşa cum era de aşteptat, deoarece s-a lucrat în cazul static, ecuaţiile Einstein nu admit o soluţie exactă. Componentele T_{ii} şi T_{44} exprimând fenomenologic contribuţia efectivă a câmpului scalar complex, se poate

aplica o mediere în timp, în mod similar celei pentru măsurătorile în curent alternativ, adică

$$\langle f \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, dt \ , \ T = 2\pi/m_0 \tag{2.37}$$

Aplicând această procedură lui (2.36.a), vom obţine o interpretare geometrică a constantei cosmologice, aceasta fiind legată de raza sferei prin relaţia

$$\Lambda = \frac{1}{a^2} \tag{2.38}$$

In aceste condiţii, ecuaţia (2.36.b) furnizează expresia amplitudinii câmpului scalar complex

$$F_0 = \pm\frac{\sqrt{2/\kappa_0}}{am_0} \tag{2.39}$$

Aplicând acum relaţia de mediere în calculul sarcinii electrice a cuantei câmpului scalar

$$\frac{m_0}{2\pi}\int_0^{2\pi/m_0}\int_{(S^3)} j_4\, dS_4\, dt = e \tag{2.40}$$

unde

$$dS_4 = \frac{a^3}{4\pi^2}\sin(2\theta) d\theta d\alpha d\beta \tag{2.41}$$

iar componenta a patra a densităţii de curent

$$j_4 = ie(\overline{\phi}(e_4\phi) - (e_4\overline{\phi})\phi) \tag{2.42}$$

fiind, din (2.22.a,b), (2.31) şi (2.35), de forma

$$j_4 = 2eEF_0^2\sin(m_0t + \xi_0) \tag{2.43}$$

obţinem, după efectuarea integralelor din (2.40), următoarea relaţie importantă pentru energia modului considerat,

$$E = \frac{\kappa_0 m_0^2}{2a} \tag{2.44}$$

Expresia funcţiei de undă $\phi(\alpha, \beta, t)$, în cazul $k = 0$, adică

$$\phi(\alpha,\, \beta,\, t) = \frac{\sqrt{2/\kappa_0}}{m_0 a} \exp(i(n_1\alpha + n_2\beta))\, \exp(-i\frac{\kappa_0 m_0^2}{2a}t) \sin(m_0 t + \xi_0) \tag{2.45}$$

mediată în timp

$$\langle\phi\rangle = \sqrt{2/\kappa_0}\, \frac{\exp(i(n_1\alpha + n_2\beta))}{2\pi m_0 a}\, \frac{1 - \exp(-i\pi\kappa_0 m_0/a)}{1 - (\kappa_0 m_0/(2a))^2} \tag{2.46}$$

este diferită de zero, punând în evidenţă o valoare specială a masei induse de câmpul gravitaţional static corespunzător lui $S^3 \times R$, pentru modul longitudinal fundamental al potenţialului vector A_μ, de forma

$$m_0 = \frac{2a}{\kappa_0} \tag{2.47}$$

Trecând la limită în (2.46), vom obţine deci

$$\langle\phi\rangle|_{m_0 = 2a/\kappa_0} = -i\frac{\sqrt{\kappa_0/8}}{a^2} \exp(i(n_1\alpha + n_2\beta)) \tag{2.48}$$

Se observă că energia totală a sistemului considerat, calculată în mod uzual ca

$$H = \int_{S^3} T_{44}\, dS_4; \tag{2.49}$$

unde dS_4 este dat de (2.41), iar T_{44} din (2.15) este

$$T_{44} = e_4 F\, e_4 F + m_0^2 F^2 = 2m_0^2 F_0^2\ , \tag{2.50}$$

are expresia

$$E = H = \int_{S^3} T_{44}\, dS_4 = \frac{2a}{\kappa_0} \tag{2.51}$$

care coincide cu masa m_0 evidenţiată mai sus.

2.2 Cuantificarea câmpului scalar complex pe varietăţi spaţio - temporale cu timp ortogonal şi 3 - suprafeţe compacte

Spre deosebire de cazul cuantificării câmpurilor în universul Minkowski, dezvoltarea completă a teoriei cuantice a câmpurilor materiale, surse ale câmpului gravitaţional, pe varietăţi spaţio-temporale cu structură generală, este încă departe de o formă definitivă, reprezentând, în continuare, un deziderat ştiinţific [7,8]. Principala dificultate în calea unei generalizări naturale, pornind de la teoria cuantică pe background minkowskian, provine din caracterul semiclasic al Teoriei Relativităţii Generale. Aceasta descrie necuantic câmpul gravitaţional prin intermediul componentelor canonice ale tensorului metric fundamental, exprimate în sistemul hărţilor locale compatibile care formează atlasul maximal al varietăţii spaţio-temporale considerate. Din această cauză, care reflectă caracterul fizic universal al interacţiunii gravitaţionale, orice câmp material încetează de a mai fi efectiv liber, aflându-se întrun cuplaj minimal - V_4 (în acord cu conexiunea Levi - Civita) cu câmpul gravitaţional einsteinian, considerat ca un câmp exterior de tip clasic. Imposibilitatea eliminării globale a câmpului gravitaţional, prin definirea adecvată a claselor reperelor olonome global echivalente, în raport cu care ecuaţiile de mişcare ale câmpului material au formă minkowskiană, induce imposibilitatea reprezentării integrale, de tip Fourier, a operatorilor de câmp $\overline{\phi}(x), \phi$ ca soluţii fundamentale ale ecuaţiilor Euler - Lagrange

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \left(\sqrt{-g} \, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \overline{\phi}_{,\mu}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \overline{\phi}} \tag{2.52}$$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\left(\sqrt{-g}\,\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{,\mu}}\right)=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} \tag{2.53}$$

în spaţiu - timpul (M,g) de tip V_4. Se obţine drept consecinţă directă invalidarea funcţiilor cauzale minkowskiene $D^{(c)}(\overline{x},x)$ drept propagatori ai câmpului material *liber*.

Din multitudinea de modele spaţio - temporale, aparţinând diverselor clase de soluţii exacte ale ecuaţiilor Einstein, modelele statice, cu direcţie temporală plată şi hipersuprafaţă de gen spaţial, Σ^3, ortogonală şi compactă, permit elaborarea unei metode unitare, cu un înalt caracter de generalitate, pentru cuantificarea câmpurilor materiale, bazată în special pe reprezentarea operatorilor de câmp, ϕ şi $\overline{\phi}$, sub forma unor dezvoltări seriale după setul complet şi ortogonal al funcţiilor proprii $\{\Lambda_{\vec{n}}(\vec{x})\}$ ale operatorului Laplace - Beltrami Δ definit pe subvarietatea spaţială Σ^3 [9].

Fie spaţiu - timpul $(\Sigma^3\times R,\ g)$, înzestrat cu metrica statică, de direcţie temporală plată

$$ds^2=g_{ij}dx^i\,dx^j-(dt)^2\ \ ;\ i,j=\overline{1,3} \tag{2.54}$$

structura geometrică background în care evoluează câmpul Klein - Gordon $\phi(x)$, descris prin funcţionala acţiune relativist V_4 - invariantă

$$S[\overline{\phi},\phi]=\int\mathcal{L}[\overline{\phi},\phi]\,d\Omega\ ;\ d\Omega=-\sqrt{-g}\,dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3\wedge dt, \tag{2.55}$$

cu densitatea de lagrangeian

$$\mathcal{L}=g^{ij}\overline{\phi}_{,i}\ \phi_{,j}-\overline{\phi}_{,t}\ \phi_{,t}+m_0^2\overline{\phi}\phi \tag{2.56}$$

şi tensorul conservativ impuls - energie - materie

$$\begin{aligned}
&a) \quad T_{ij} = \overline{\phi}_{,i}\ \phi_{,j} + \overline{\phi}_{,j}\ \phi_{,i} - g_{ij}[g^{ks}\overline{\phi}_{,k}\ \overline{\phi}_{,s} - \overline{\phi}_{,t}\ \phi_{,t} + m_0^2\overline{\phi}\phi] \\
&b) \quad T_{i4} = \overline{\phi}_{,i}\ \phi_{,4} + \overline{\phi}_{,4}\ \phi_{,i} \\
&c) \quad T_{44} = g^{ks}\overline{\phi}_{,k}\ \phi_{,s} + \overline{\phi}_{,t}\ \phi_{,t} + m_0^2\overline{\phi}\ \phi
\end{aligned} \tag{2.57}$$

Aplicarea principiului Hamilton de staţionaritate a funcţionalei acţiune $S[\overline{\phi}, \phi]$ conduce la ecuaţiile Klein - Gordon pe $(\Sigma^3 \times R, g)$:

$$\begin{aligned}
&a) \quad \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^i}[\sqrt{-g}g^{ij}\phi_{,j}] - \phi_{,tt} - m_0^2\phi = 0 \\
&b) \quad \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^i}[\sqrt{-g}g^{ij}\overline{\phi}_{,j}] - \overline{\phi}_{,tt} - m_0^2\overline{\phi} = 0
\end{aligned} \tag{2.58}$$

adică

$$\Delta\phi - \phi_{,tt} - m_0^2\phi = 0$$

$$\Delta\overline{\phi} - \overline{\phi}_{,tt} - m_0^2\overline{\phi} = 0 \tag{2.59}$$

unde Δ reprezintă operatorul Laplace - Beltrami

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^i}[\sqrt{-g}\ g^{ij}\ \frac{\partial}{\partial x^j}] \tag{2.60}$$

definit pe subvarietatea de gen spaţial Σ^3. Utilizând pentru integrarea ecuaţiilor Klein - Gordon pe $\Sigma^3 \times R,\ g)$ metoda Fourier de separare a variabilelor

$$\phi(x^\mu) = \Lambda(x^i)\,T(t)$$

$$\overline{\phi}(x^\mu) = \overline{\Lambda}(x^i)\,\overline{T}(t) \tag{2.61}$$

rezultă, pentru operatorii de câmp $\phi(x)$ şi $\overline{\phi}(x)$, următoarele expresii

$$
\begin{aligned}
a)\quad & \phi(x) = \sum_{\vec{n}} \left[\frac{a_+(\vec{n})}{\sqrt{2\omega_{\vec{n}}}} \exp(i\omega_{\vec{n}} t) + \frac{a_-(\vec{n})}{\sqrt{2\omega_{\vec{n}}}} \exp(-i\omega_{\vec{n}} t) \right] \Lambda_{\vec{n}}(x^i) \\
b)\quad & \overline{\phi}(x) = \sum_{\vec{n}} \left[\frac{b_+(\vec{n})}{\sqrt{2\omega_{\vec{n}}}} \exp(i\omega_{\vec{n}} t) + \frac{b_-(\vec{n})}{\sqrt{2\omega_{\vec{n}}}} \exp(-i\omega_{\vec{n}} t) \right] \overline{\Lambda}_{\vec{n}}(x^i)
\end{aligned}
\tag{2.62}
$$

în care

$$
\begin{aligned}
b_+(\vec{n}) &= \overline{a}_-(\vec{n}) \\
b_-(\vec{n}) &= \overline{a}_+(\vec{n}) \\
V &= \int_{\Sigma^3} \sqrt{-g}\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\
\omega_{\vec{n}} &= \sqrt{\lambda_{\vec{n}}^2 + m_0^2}
\end{aligned}
\tag{2.63}
$$

iar $\{\lambda_{\vec{n}}^2,\ \Lambda_{\vec{n}}(x^i)\}$ reprezintă setul complet de valori şi funcţii proprii ortonormale corespunzătoare descompunerii spectrale Laplace - Beltrami - Σ^3

$$
\begin{aligned}
a)\quad & \Delta\Lambda_{\vec{n}}(x^i) + \lambda_{\vec{n}}^2 \Lambda_{\vec{n}}(x^i) = 0 \\
b)\quad & \int_{\Sigma^3} \overline{\Lambda}_{\vec{n}}(x^i)\, \Lambda_{\vec{m}}(x^i) \sqrt{-g}\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = \delta(\vec{n} - \vec{m})
\end{aligned}
\tag{2.64}
$$

Dezvoltarea metodei de cuantificare canonică a câmpului Klein - Gordon pe $(\Sigma^3 \times R, g)$ are la bază următoarele relaţii de comutare, la t fixat

$$
\begin{aligned}
a)\quad & [\overline{\phi}_{,t}(\overline{x}^i, t),\ \phi(x^j, t)] = i\delta(\overline{x}^k - x^k) \\
b)\quad & [\phi_{,t}(\overline{x}^i, t),\ \overline{\phi}(x^j, t)] = i\delta(\overline{x}^k - x^k)
\end{aligned}
\tag{2.65}
$$

pe care trebuie să le satisfacă operatorii de câmp $\overline{\phi}(x^i, t)$, $\phi(x^j, t)$.

Să analiză acum relaţia de cuantificare (2.65.a). Utilizând expresiile (2.62), avem

$$\sum_{\vec{n},\vec{m}} \frac{i}{2} \sqrt{\frac{\omega_{\vec{n}}}{\omega_{\vec{m}}}} [b_+(\vec{n}) \exp(i\omega_{\vec{n}}t) - b_-(\vec{n}) \exp(-i\omega_{\vec{n}}t)]$$

$$[a_+(\vec{m}) \exp(i\omega_{\vec{m}}t) + a_-(\vec{m}) \exp(-i\omega_{\vec{m}}t)]\overline{\Lambda}_{\vec{n}}(\overline{x}^i)\Lambda_{\vec{m}}(x^j) -$$

$$-\sum_{\vec{n},\vec{m}} \frac{i}{2} \sqrt{\frac{\omega_{\vec{n}}}{\omega_{\vec{m}}}} [a_+(\vec{m}) \exp(i\omega_{\vec{m}}t) + a_-(\vec{m}) \exp(-i\omega_{\vec{m}}t)]$$

$$[b_+(\vec{n}) \exp(i\omega_{\vec{n}}t) - b_-(\vec{n}) \exp(-i\omega_{\vec{n}}t)]\overline{\Lambda}_{\vec{n}}(\overline{x}^i)\Lambda_{\vec{m}}(x^j) = i\delta(\overline{x}^k - x^k]$$

ceea ce ne conduce la următoarele relaţii de comutare satisfăcute de operatorii de creare şi anihilare (b_+, a_-) şi (a_+, b_-) :

$$\begin{aligned} a) \quad [b_+(\vec{n}), a_-(\vec{m})] &= \delta(\vec{n} - \vec{m}) \\ b) \quad [b_-(\vec{n}), a_+(\vec{m})] &= -\delta(\vec{n} - \vec{m}) \\ c) \quad [b_+(\vec{n}), a_+(\vec{m})] &= [b_-(\vec{n}), a_-(\vec{m})] = 0 \end{aligned} \tag{2.66}$$

şi la următoarele relaţii de completitudine de tip Plancherel - Σ^3 :

$$\sum_{\vec{n}} \overline{\Lambda}_{\vec{n}}(\overline{x}^i)\, \Lambda_{\vec{n}}(x^j) = \delta(\overline{x}^k - x^k) \tag{2.67}$$

Relaţia de cuantificare (2.65.b) conduce, datorită caracterului antisimetric al comutatorului şi al caracterului par al funcţionalei Dirac, la aceleaşi relaţii de comutare (2.66) şi la aceeaşi relaţie (2.67) de completitudine a funcţiilor proprii ortonormalw $\Lambda_{\vec{n}}(x^i)$.

In continuare, considerăm operatorii de câmp $\phi(x)$, $\overline{\phi}(x)$. Utilizând relaţiile de descompunere în frecvenţe pozitive şi negative

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \phi_+(x) + \phi_-(x) \\ \overline{\phi}(x) &= \overline{\phi}_+(x) + \overline{\phi}_-(x) \end{aligned} \tag{2.68}$$

se defineşte produsul normal al celor doi operatori sub forma obişnuită

$$N[\overline{\phi}(\overline{x})] = \overline{\phi}_+(\overline{x})\phi_+(x) + \overline{\phi}_+(\overline{x})\phi_-(x) + \phi_+(x)\overline{\phi}_-(\overline{x}) + \overline{\phi}_-(\overline{x})\phi_-(x) \tag{2.69}$$

care corespunde acţiunii la dreapta, întâi a operatorului de anihilare şi apoi a celui de creare. Evident, din cauza relaţiilor de comutare (2.66.c), în cazurile $\overline{\phi}_+(\overline{x})\phi_+(x)$ şi $\overline{\phi}_-(\overline{x})\phi_-(x)$, ordinea de acţiune este indiferentă.

Definind, în baza invarianţei globale $U(1)$ a densităţii de lagrangeian (2.56), componentele 4-vectorului densitate de curent electric

$$j^\mu = ieg^{\mu\nu}\,[\overline{\phi}\phi_{,\nu} - \overline{\phi}_{,\nu}\,\phi] \tag{2.70}$$

adică

$$a)\quad j^i = ieg^{ij}\,[\overline{\phi}\phi_{,j} - \overline{\phi}_{,j}\,\phi]$$
$$b)\quad j^4 = -ie[\overline{\phi}\phi_{,t} - \overline{\phi}_{,t}\,\phi] \tag{2.71}$$

se poate exprima operatorul de sarcină Q a câmpului Klein - Gordon, în spaţiu - timpul $\Sigma^3 \times R$, prin relaţia

$$Q = \int_{\Sigma^3} N[j^4]\, dS_4 = \int_{\Sigma^3} \sqrt{-g}(-ie)\, N[\overline{\phi}\phi_{,t} - \overline{\phi}_{,t}\,\phi]\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \tag{2.72}$$

ceea ce revine la

$$Q = e\sum_{\vec{n},\vec{m}} \int_{\Sigma^3} \frac{\sqrt{-g}}{2} \sqrt{\frac{\omega_{\vec{m}}}{\omega_{\vec{n}}}}\, N[(b_+(\vec{n})\exp(i\omega_{\vec{n}}t) + b_-(\vec{n})\exp(-i\omega_{\vec{n}}t))$$
$$(a_+(\vec{m})\exp(-i\omega_{\vec{m}}t) - a_-(\vec{m})\exp(-i\omega_{\vec{m}}t))]\overline{\Lambda}_{\vec{n}}(x^i)\Lambda_{\vec{m}}(x^i)dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 -$$
$$-e\sum_{\vec{n},\vec{m}} \int_{\Sigma^3} \frac{\sqrt{-g}}{2} \sqrt{\frac{\omega_{\vec{n}}}{\omega_{\vec{m}}}}\, N[(b_+(\vec{n})\exp(i\omega_{\vec{n}}t) - b_-(\vec{n})\exp(-i\omega_{\vec{n}}t))$$
$$(a_+(\vec{m})\exp(i\omega_{\vec{m}}t) + a_-(\vec{m})\exp(-i\omega_{\vec{m}}t))]\overline{\Lambda}_{\vec{n}}(x^i)\Lambda_{\vec{m}}(x^i)dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$$

se defineşte produsul normal al celor doi operatori sub forma obişnuită

$$N[\overline{\phi}(\overline{x})] = \overline{\phi}_+(\overline{x})\phi_+(x) + \overline{\phi}_+(\overline{x})\phi_-(x) + \phi_+(x)\overline{\phi}_-(\overline{x}) + \overline{\phi}_-(\overline{x})\phi_-(x) \tag{2.69}$$

care corespunde acţiunii la dreapta, întâi a operatorului de anihilare şi apoi a celui de creare. Evident, din cauza relaţiilor de comutare (2.66.c), în cazurile $\overline{\phi}_+(\overline{x})\phi_+(x)$ şi $\overline{\phi}_-(\overline{x})\phi_-(x)$, ordinea de acţiune este indiferentă.

Definind, în baza invarianţei globale $U(1)$ a densităţii de lagrangeian (2.56), componentele 4-vectorului densitate de curent electric

$$j^\mu = ieg^{\mu\nu}\,[\overline{\phi}\phi_{,\nu} - \overline{\phi}_{,\nu}\phi] \tag{2.70}$$

adică

$$\begin{aligned} &a)\quad j^i = ieg^{ij}\,[\overline{\phi}\phi_{,j} - \overline{\phi}_{,j}\,\phi] \\ &b)\quad j^4 = -ie[\overline{\phi}\phi_{,t} - \overline{\phi}_{,t}\,\phi] \end{aligned} \tag{2.71}$$

se poate exprima operatorul de sarcină Q a câmpului Klein - Gordon, în spaţiu - timpul $\Sigma^3 \times R$, prin relaţia

$$Q = \int_{\Sigma^3} N[j^4]\,dS_4 = \int_{\Sigma^3} \sqrt{-g}(-ie)\,N[\overline{\phi}\phi_{,t} - \overline{\phi}_{,t}\,\phi]\,dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \tag{2.72}$$

ceea ce revine la

$$\begin{aligned} Q = e\textstyle\sum_{\vec{n},\vec{m}} \int_{\Sigma^3} \frac{\sqrt{-g}}{2}\sqrt{\frac{\omega_{\vec{m}}}{\omega_{\vec{n}}}}\, & N[(b_+(\vec{n})\exp(i\omega_{\vec{n}}t) + b_-(\vec{n})\exp(-i\omega_{\vec{n}}t)) \\ (a_+(\vec{m})\exp(-i\omega_{\vec{m}}t) - a_-(\vec{m})\exp(-i\omega_{\vec{m}}t))] & \overline{\Lambda}_{\vec{n}}(x^i)\Lambda_{\vec{m}}(x^i)dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 - \\ -e\textstyle\sum_{\vec{n},\vec{m}} \int_{\Sigma^3} \frac{\sqrt{-g}}{2}\sqrt{\frac{\omega_{\vec{n}}}{\omega_{\vec{m}}}}\, & N[(b_+(\vec{n})\exp(i\omega_{\vec{n}}t) - b_-(\vec{n})\exp(-i\omega_{\vec{n}}t)) \\ (a_+(\vec{m})\exp(i\omega_{\vec{m}}t) + a_-(\vec{m})\exp(-i\omega_{\vec{m}}t))] & \overline{\Lambda}_{\vec{n}}(x^i)\Lambda_{\vec{m}}(x^i)dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \end{aligned}$$

adică

$$Q = e\sum_{\vec{n}}[a_+(\vec{n})b_-(\vec{n}) - b_+(\vec{n})a_-(\vec{n})] \tag{2.73}$$

expresie ce evidenţiază natural operatorul număr de particule $N_{\vec{n}}^{(+)}$

$$N_{\vec{n}}^{(+)} = a_+(\vec{n})b_-(\vec{n}) \tag{2.74}$$

şi operatorul număr de antiparticule $N_{\vec{n}}^{(-)}$

$$N_{\vec{n}}^{(-)} = b_+(\vec{n})a_-(\vec{n}) \tag{2.75}$$

Pentru a determina forma completă a propagatorului câmpului scalar - complex de masă nenulă, în cazul cuantificării în spaţiu - timp $(\Sigma^3 \times R, g)$, se pleacă de la expresia cunoscută a produsului cronologic al operatorilor de câmp $\overline{\phi}(\overline{x}), \phi(x)$, adică

$$\mathrm{T}[\overline{\phi}(\overline{x})\phi(x)] = \tag{2.76}$$
$$N[\overline{\phi}(\overline{x})\phi(x)] + \hat{\theta}(\overline{t}-t)[\overline{\phi}_-(\overline{x}),\ \phi_+(x)] - \hat{\theta}(t-\overline{t})[\overline{\phi}_+(\overline{x}),\ \phi_-(x)]$$

în care se calculează cei doi comutatori, ţinând seama de relaţiile (2.68), (2.62) şi (2.66)

$$\begin{aligned}[\overline{\phi}_-(\overline{x}),\ \phi_+(x)] &= \sum_{\vec{n},\vec{m}} \frac{\exp(-i\omega_{\vec{n}}\overline{t})\exp(i\omega_{\vec{m}}t)}{2\sqrt{\omega_{\vec{m}}\omega_{\vec{n}}}} \\ &\qquad [b_-(\vec{n}), a_+(\vec{m})]\overline{\Lambda}_{\vec{n}}(\overline{x}^i)\Lambda_{\vec{m}}(x^j) = \\ &= -\sum_{\vec{n}} \frac{\exp(i\omega_{\vec{n}}(\overline{t}-t))}{2\omega_{\vec{n}}}\overline{\Lambda}_{\vec{n}}(\overline{x}^i)\Lambda_{\vec{m}}(x^j)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[\overline{\phi}_+(\overline{x}),\ \phi_-(x)] &= \sum_{\vec{n},\vec{m}} \frac{\exp(i\omega_{\vec{n}}\overline{t})\exp(-i\omega_{\vec{m}}t)}{2\sqrt{\omega_{\vec{m}}\omega_{\vec{n}}}} \\ &\qquad [b_+(\vec{n}), a_-(\vec{m})]\overline{\Lambda}_{\vec{n}}(\overline{x}^i)\Lambda_{\vec{m}}(x^j) = \\ &= \sum_{\vec{n}} \frac{\exp(i\omega_{\vec{n}}(t-\overline{t}))}{2\omega_{\vec{n}}}\overline{\Lambda}_{\vec{n}}(\overline{x}^i)\Lambda_{\vec{m}}(x^j)\end{aligned}$$

Obţinem astfel pentru relaţia (2.76) expresia

$$\mathrm{T}[\overline{\phi}(\overline{x})\ \phi(x)] = N[\overline{\phi}(\overline{x})\ \phi(x)] - \tag{2.77}$$

$$\sum_{\vec{n}} \frac{\hat{\theta}(\overline{t}-t)\ \exp[-i\omega_{\vec{n}}(\overline{t}-t)] + \hat{\theta}(t-\overline{t})\ \exp[-i\omega_{\vec{n}}(t-\overline{t})]}{2\omega_{\vec{n}}} \overline{\Lambda}_{\vec{n}}(\overline{x}^i)\ \Lambda_{\vec{n}}(x^j)$$

din care rezultă funcţia Green cauzală $D^{(c)}_{m0}(\overline{x}, x)$ (propagatorul câmpului scalar complex cu masă nenulă pe $\Sigma^3 \times R$) ca *valoare medie de aşteptare pe starea de vid*

$$D^{(c)}_{m0}(\overline{x}, x) = \langle 0|\mathrm{T}[\overline{\phi}(\overline{x})\ \phi(x)]|0\rangle =$$

$$= -\sum_{\vec{n}} \frac{\hat{\theta}(\overline{t}-t)\ \exp[-i\omega_{\vec{n}}(\overline{t}-t)] + \hat{\theta}(t-\overline{t})\ \exp[-i\omega_{\vec{n}}(t-\overline{t})]}{2\omega_{\vec{n}}}$$

$$\overline{\Lambda}_{\vec{n}}(\overline{x}^i)\Lambda_{\vec{n}}(x^j) \tag{2.78}$$

2.3 Procedeul de cuantificare pe $S^3 \times R$

In cele ce urmează, rezultatele obţinute în acest paragraf vor fi concretizate la cazul cuantificării câmpului Klein - Gordon, pe varietatea spaţio - temporală $S^3 \times R$, înzestrată cu metrica (1.179,183), pentru care operatorul Laplace - Beltrami (2.60) are expresia

$$\Delta = \frac{1}{a^2}\left\{\frac{1}{\sin(2\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}[\sin(2\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}] + \frac{1}{\cos^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\right\} \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{a^2}\tilde{\Delta} \tag{2.79}$$

Utilizând (2.79) şi relaţia de descompunere (2.61), în ecuaţiile Klein - Gordon (2.59), se obţine forma explicită a ecuaţiei (2.64.a), pentru funcţiile proprii ortonormale $\Lambda_{\vec{n}}(x^i) = \Lambda_{\vec{n}}(\theta, \alpha, \beta)$

$$\frac{1}{\sin(2\theta)} \frac{\partial}{\partial\theta}[\sin(2\theta)\frac{\partial\Lambda_{\vec{n}}}{\partial\theta}] + \frac{1}{\cos^2\theta}\frac{\partial^2\Lambda_{\vec{n}}}{\partial\alpha^2} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Lambda_{\vec{n}}}{\partial\beta^2} + $$
$$+ a^2(\omega_{\vec{n}}^2 - m_0^2)\Lambda_{\vec{n}} = 0 \qquad (2.80)$$

Aplicând în ecuaţia (2.80) metoda Fourier de separare a variabilelor

$$\Lambda_{\vec{n}}(\theta, \alpha, \beta) = \Theta(\theta)A(\alpha)B(\beta) , \qquad (2.81)$$

se obţin pentru funcţiile A şi B expresiile

$$A(\alpha) = \exp(im_1\alpha)$$
$$\text{cu } m_1, m_2 \in Z \qquad (2.82)$$
$$B(\beta) = \exp(im_2\beta)$$

iar pentru funcţia Θ ecuaţia

$$\frac{1}{\sin(2\theta)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin(2\theta)\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right) + \left[a^2(\omega_{\vec{n}}^2 - m_0^2) - \frac{m_1^2}{\cos^2\theta} - \frac{m_2^2}{\sin^2\theta}\right]\Theta = 0 \qquad (2.83)$$

Efectuând, în ecuaţia (2.83), schimbarea de variabilă

$$z = \cos(2\theta) \qquad (2.84)$$

şi schimbarea de funcţie

$$\Theta(\theta) = (1+z)^{m_1/2}(1-z)^{m_2/2}U(z) , \qquad (2.85)$$

se ajunge la ecuaţia

$$(1-z^2)\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}z^2} - [(m_2 - m_1) + (m_2 + m_1 + 2)z]\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}z} + $$
$$+ \left[\frac{a^2}{4}(\omega_{\vec{n}}^2 - m_0^2) - \frac{1}{2}\left(\frac{m_1}{2} + \frac{m_2}{2}\right)(m_1 + m_2 + 2)\right]U = 0 \qquad (2.86)$$

care admite structura spectrală

$$\omega_{\vec{n}}^2 = m_0^2 + \frac{4}{a^2}\left(n + \frac{m_1}{2} + \frac{m_2}{2}\right)\left(n + \frac{m_1}{2} + \frac{m_2}{2} + 1\right) \; ; \; n \in N \quad (2.87)$$

şi soluţia regulată de tip polinomial Jacobi

$$U(z) = P_n^{(m_2,m_1)}(z) \quad (2.88)$$

unde

$$P_n^{(m_2,m_1)}(z) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}(1+z)^{-m_1}(1-z)^{-m_2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n}\left[(1+z)^{n+m_1}(1-z)^{n+m_2}\right] \quad (2.89)$$

sunt polinoamele Jacobi de grad $\underline{n}$.

Introducând numerele cuantice

$$\begin{aligned} m\prime &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2) \\ m &= \frac{1}{2}(m_1 - m_2) \\ j &= n + m\prime \end{aligned} \quad (2.90)$$

şi înmulţind membrul drept al expresiei (2.85) pentru funcţia Θ cu termenul factor

$$\left[\frac{(j+m\prime)!(j-m\prime)!}{(j+m)!(j-m)!}\right]^{1/2}$$

se obţine, luând în considerare şi (2.82), setul complet al funcţiilor proprii ortonormale $\{\Lambda_{\vec{n}}(\theta,\alpha,\beta) \; ; \; \vec{n} = (j, m\prime, m)\}$, în raport cu măsura

$$\sqrt{-g}\, d^3x = \frac{a^3}{2}\sin(2\theta)\, d\theta d\alpha d\beta \quad (2.91)$$

ale operatorului Laplace - Beltrami - S^3 (2.79)

$$\begin{aligned} \Lambda_{\vec{n}}(\theta,\alpha,\beta) &= \sqrt{\frac{2j+1}{V}}\exp[i(m\prime - m)\beta]\, W_{m\prime m}^{j}(2\theta)\exp[i(m\prime + m)\alpha] \\ &= \mathcal{D}_{m\prime m}^{j}(\theta,\alpha,\beta) \end{aligned} \quad (2.92)$$

Aici $V = 2\pi^2 a^3$ este volumul sferei S^3 iar $W^{(j)}_{m'm}(2\theta)$ sunt funcţiile Wigner

$$W^{(j)}_{m'm}(2\theta) = \left[\frac{(j+m')!(j-m')!}{(j+m)!(j-m)!}\right]^{1/2} (\cos\theta)^{m'+m} (\sin\theta)^{m'-m} \cdot P^{(m'-m,m'+m)}_{j-m'}(\cos(2\theta)) \tag{2.93}$$

Evident, din (2.90) şi (2.87), rezultă spectrul energetic discret

$$\omega_{\vec{n}} = \left[m_0^2 + \frac{4}{a^2} j(j+1)\right]^{1/2} \tag{2.94}$$

Cu ajutorul funcţiilor proprii (2.92), se pot explicita relaţiile (2.62.a), (2.62.b), obţinându-se forma concretă a operatorilor de câmp $\phi(x)$, $\overline{\phi}(x)$ pe $S^3 \times R$:

$$\phi(x) = \sum_j \sum_{m'=-j}^{j} \sum_{m=-j}^{j} \left[\frac{a_+(j,m',m)}{\sqrt{2\omega_{\vec{n}}}} \exp(i\omega_{\vec{n}} t) + \frac{a_-(j,m',m)}{\sqrt{2\omega_{\vec{n}}}} \exp(-i\omega_{\vec{n}} t)\right] \mathcal{D}^j_{m'm}(\theta,\alpha,\beta) \tag{2.95}$$

$$\overline{\phi}(x) = \sum_j \sum_{m'=-j}^{j} \sum_{m=-j}^{j} \left[\frac{b_+(j,m',m)}{\sqrt{2\omega_{\vec{n}}}} \exp(i\omega_{\vec{n}} t) + \frac{b_-(j,m',m)}{\sqrt{2\omega_{\vec{n}}}} \exp(-i\omega_{\vec{n}} t)\right] \overline{\mathcal{D}}^j_{m'm}(\theta,\alpha,\beta) \tag{2.96}$$

iar, din (2.92) şi (2.78) rezultă pentru propagatorul câmpului $\phi(x)$ pe $S^3 \times R$ expresia concretă

$$D^{(c)}_{m0}(\overline{x},x) = -\sum_j \sum_{m'=-j}^{j} \sum_{m=-j}^{j} (2\omega_{\vec{n}})^{-1} \left\{\hat{\theta}(\bar{t}-t)\exp[-i\omega_{\vec{n}}(\bar{t}-t)] + \hat{\theta}(t-\bar{t}) \exp[-i\omega_{\vec{n}}(t-\bar{t})]\right\} \mathcal{D}^j_{m'm}(\bar{\theta},\bar{\alpha},\bar{\beta})\, \mathcal{D}^j_{m'm}(\theta,\alpha,\beta)$$

Bibliografie

[1] Dariescu, M.A., and Dariescu, C., 1993, *TENSOR N.S.* **53**, 162.

[2] Straumann, N., 1984, *General Relativity and Relativistic Astrophysics*, Berlin: Springer-Verlag.

[3] Zet, G., 1990, *Found. Phys.* **20**, 111.

[4] Dariescu, C., and Dariescu, M.A., 1991, *Found. Phys.* **21**, 1323.

[5] Zet, G., Dariescu, C., and Dariescu, M.A., 1993, *TENSOR N.S.* **52**, 14.

[6] Sen,D., 101, 1986, J. Math. Phys. **27**, 472.

[7] Birrell, N.D., and Davies, P.C.W., 1982, *Quantum Fields in Curved Space*, Cambridge: Cambridge Univ. Press.

[8] Fulling, S.A., 1989, *Aspects of Quantum Field Theory in Curved Space-Time*, Cambridge: Cambridge Univ. Press.

[9] Dariescu, C., and Dariescu, M.A., 1996, in *Lagrange and Finsler Geometry*, ed. P.L. Antonelli and R. Miron, Amsterdam: Kluwer Academic Publishers.

Cuprins

3 FERMIONI PE $S^3 \times R$ 89

3.1 Câmpul Dirac în Universul Einstein 89

3.2 Zero - modurile câmpului de spin 1/2 în spaţiu - timpul $S^3 \times R$ 99

3.3 O metodă algebrică, formal - perturbativă de integrare a ecuaţiei Dirac pe spaţiu - timp curb 102

3.3.1 Stabilirea convenţiilor 103

3.3.2 Soluţia dinamică de ordinul întâi 106

3.4 Geometrodinamica $SO(3,1) \times SU(N)$ - gauge invariantă a câmpurilor Yang - Mills şi Rarita - Schwinger 110

Capitolul 3

FERMIONI PE $S^3 \times R$

3.1 Câmpul Dirac în Universul Einstein

In prima parte a acestui paragraf, vom construi expresia generală a lagrangeianului Dirac, pe varietatea spaţio - temporală $S^3 \times R$, prin două metode

- Prima, utilizând formalismul tetradic, are ca punct de plecare lucrarea lui D. Sen [1], în care sunt deduse expresiile lagrangeienilor pentru fermionii Dirac, Weyl şi Majorana. In ultimul paragraf al acestui capitol, vom dezvolta acest formalism în cadrul unei teorii $SU(N)$ - gauge invariante, pentru fermionii de spin 1/2 şi 3/2, obţinând sistemul de ecuaţii Dirac - Yang - Mills şi respectiv Rarita - Schwinger - Yang - Mills.

- A doua metodă de studiu a fermionilor pe spaţiu - timpul $S^3 \times R$, iniţiată de M. Carmeli şi S. Malin [2-7], are la bază simetriile globale ale acestei varietăţi. Astfel, prin analogie cu spaţiul

Minkowski, unde cele patru translaţii formează un subgrup invariant al grupului Poincare, grupul corespunzător lui $S^3 \times R$ conţine un subgrup generat de $ie_4 = i\partial_t$ şi $\{J_i = i(L_i + S_i)\}_{i=1,2,3}$. De altfel, M. Carmeli aplicase, anterior, această metodă, de trecere de la reprezentarea de impuls la cea de moment cinetic orbital, la scrierea ecuaţiei Schrödinger pe $S^3 \times R$, pentru o particulă de masă m_0 şi moment de inerţie I_0, sub forma [2]

$$\left(-\frac{\vec{L}^2}{2I_0} + V\right)\psi = i\partial_t\psi \tag{3.1}$$

unde operatorul moment cinetic orbital $\vec{L}$ este o funcţie de cele trei unghiuri Euler. In mod analog, ecuaţia Klein - Gordon pentru particula liberă

$$\left(\vec{L}^2 - \frac{1}{\gamma^2}\partial_t^2\right)\phi(t,\theta) = (I_0\gamma)^2\phi(t,\theta) \tag{3.2}$$

cu $\gamma = (m_0/I_0)^{1/2}$ particularizează pe (2.16.a) pentru $A_\mu = 0$. Evident, în (3.2), $\gamma^2 L^2$ este laplaceianul pe S^3.

Surprinzător este faptul că simetria maximă a varietăţii S^3 şi păstrarea separată a dimensiunii temporale plate simplifică mult problema formulării teoriilor de câmp pe acestă varietate, conducând la generalizări directe ale rezultatelor similare de pe spaţiul Minkowski. In lucrarea [4], M. Carmeli şi S. Malin aplică procedeul descris mai sus şi în cazul formulării ecuaţiei Dirac, pe care o scriu într-o formă analoagă celei de pe spaţiul plat

$$(\partial_t + \vec{\alpha}\cdot\vec{L} + iI_0\beta)\psi = 0 \tag{3.3}$$

In cele ce urmează, vom completa ecuaţia (3.3) în cadrul unei teorii $SO(3,1)\times SU(N)$ - gauge invariante, punând în evidenţă un

termen suplimentar ce exprimă contribuţia efectelor gravitaţionale de spin.

Consideraţiile de mai sus au la bază faptul că varietatea grupului $SU(2)$ este topologic echivalentă cu sfera S^3.

Intr-adevăr, pentru sfera S^3, definită ca mulţimea punctelor cu distanţa la origine egală cu unitatea

$$S^3 = \{x = (x^1,\, x^2,\, x^3,\, x^4) \in R^4\,,\, (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2 = 1\}\,, \tag{3.4}$$

şi având simetria de rotaţie $O(4)$ a cărei algebră Lie este $SU(2) \times SU(2)$, se poate introduce o aplicaţie de la punctele lui S^3 la elementele grupului $SU(2)$. Astfel, orice element U al lui $SU(2)$ se scrie, în funcţie de matricile lui Pauli $\{\sigma_i\}_{i=1,2,3}$, sub forma

$$U = x_4 + i\vec{x}\cdot\vec{\sigma} \tag{3.5}$$

cu $x_4^2 + \vec{x}^2 = 1$, care este tocmai ecuaţia sferei S^3, în spaţiul euclidian 4 - dimensional.

Pentru descrierea câmpurilor fermionice pe $S^3 \times R$, trebuie să construim, mai întâi, în fiecare punct al varietăţii, un reper tetradic. Deoarece timpul este plat şi separat de componentele spaţiale compactificate, iar sfera S^3 este paralelizabilă, vom construi în fiecare punct de pe sfera S^3, un reper format din trei vectori ortogonali, continuu peste tot. Vectorii

$$\begin{aligned}
X_1 &= x^4\partial_1 + x^3\partial_2 - x^2\partial_3 - x^1\partial_4 \\
X_2 &= -x^3\partial_1 + x^4\partial_2 + x^1\partial_3 - x^2\partial_4 \\
X_3 &= x^2\partial_1 - x^1\partial_2 + x^4\partial_3 - x^3\partial_4
\end{aligned} \tag{3.6}$$

formează un triad drept şi satisfac algebra

$$[X_1,\ X_2] = 2X_3\ ;\ [X_2,\ X_3] = 2X_1\ ; [X_3,\ X_1] = 2X_2 \tag{3.7}$$

Triadul stâng $\{Y_1,\ Y_2,\ Y_3\}$ se poate raporta la acesta prin operaţia de paritate

$$Y_i = -PX_i \tag{3.8}$$

şi conţine vectorii

$$\begin{aligned} Y_1 &= x^4\partial_1 - x^3\partial_2 + x^2\partial_3 - x^1\partial_4 \\ Y_2 &= x^3\partial_1 + x^4\partial_2 - x^1\partial_3 - x^2\partial_4 \\ Y_3 &= -x^2\partial_1 + x^1\partial_2 + x^4\partial_3 - x^3\partial_4 \end{aligned} \tag{3.9}$$

satisfăcând relaţiile de comutare

$$[Y_1,\ Y_2] = -2Y_3\ ;\ [Y_2,\ Y_3] = -2Y_1\ ;\ [Y_3,\ Y_1] = -2Y_2 \tag{3.10}$$

Se observă că putem forma următoarele combinaţii

$$\begin{aligned} a)\quad L_i &= \frac{i}{2}(X_i - Y_i) = -i\varepsilon_{ijk}x_l\partial_k \\ b)\quad K_i &= \frac{i}{2}(X_i + Y_i) = i(x^4\partial_i - x^i\partial_4) \end{aligned} \tag{3.11}$$

unde $\{L_i,\ K_i\}_{i=1,2,3}$ corespund, în limita razei sferei tinzând la infinit, celor 6 generatori ai algebrei Lorentz pe spaţiul Minkowski

$$\begin{aligned} a)\quad [L_i,\ L_j] &= i\varepsilon_{ijk}L^k \\ b)\quad [K_i,\ K_j] &= i\varepsilon_{ijk}L^k \\ c)\quad [L_i,\ K_j] &= i\varepsilon_{ijs}K^s \end{aligned} \tag{3.12}$$

Pentru $(x^4 = 1)$, $\{L_i\}_{i=1,2,3}$ generează rotaţii în jurul lui x^i, iar $\{K^i\}_{i=1,2,3}$ generează translaţii în lungul lui x^i. Rotaţiile în planele (x^i, x^4), corespunzând simetriilor *boost*, sunt absente.

formează un triad drept şi satisfac algebra

$$[X_1,\ X_2] = 2X_3\ ;\ [X_2,\ X_3] = 2X_1\ ; [X_3,\ X_1] = 2X_2 \tag{3.7}$$

Triadul stâng $\{Y_1,\ Y_2,\ Y_3\}$ se poate raporta la acesta prin operaţia de paritate

$$Y_i = -PX_i \tag{3.8}$$

şi conţine vectorii

$$\begin{aligned} Y_1 &= x^4\partial_1 - x^3\partial_2 + x^2\partial_3 - x^1\partial_4 \\ Y_2 &= x^3\partial_1 + x^4\partial_2 - x^1\partial_3 - x^2\partial_4 \\ Y_3 &= -x^2\partial_1 + x^1\partial_2 + x^4\partial_3 - x^3\partial_4 \end{aligned} \tag{3.9}$$

satisfăcând relaţiile de comutare

$$[Y_1,\ Y_2] = -2Y_3\ ;\ [Y_2,\ Y_3] = -2Y_1\ ;\ [Y_3,\ Y_1] = -2Y_2 \tag{3.10}$$

Se observă că putem forma următoarele combinaţii

$$\begin{aligned} &a)\quad L_i = \frac{i}{2}(X_i - Y_i) = -i\varepsilon_{ijk}x_l\partial_k \\ &b)\quad K_i = \frac{i}{2}(X_i + Y_i) = i(x^4\partial_i - x^i\partial_4) \end{aligned} \tag{3.11}$$

unde $\{L_i,\ K_i\}_{i=1,2,3}$ corespund, în limita razei sferei tinzând la infinit, celor 6 generatori ai algebrei Lorentz pe spaţiul Minkowski

$$\begin{aligned} &a)\quad [L_i,\ L_j] = i\varepsilon_{ijk}L^k \\ &b)\quad [K_i,\ K_j] = i\varepsilon_{ijk}L^k \\ &c)\quad [L_i,\ K_j] = i\varepsilon_{ijs}K^s \end{aligned} \tag{3.12}$$

Pentru $(x^4 = 1)$, $\{L_i\}_{i=1,2,3}$ generează rotaţii în jurul lui x^i, iar $\{K^i\}_{i=1,2,3}$ generează translaţii în lungul lui x^i. Rotaţiile în planele (x^i, x^4), corespunzând simetriilor *boost*, sunt absente.

Baza duală, corespunzătoare tetradului $\{e_\mu\}_{\mu=\overline{1,4}} = \{X_1, X_2, X_3, \partial_t\}$, se va obţine din

$$\omega^a(e_b) = \delta^a_b \tag{3.13}$$

şi este de forma

$$\begin{aligned}
\omega^1 &= \cos(\alpha+\beta)\sin\theta\cos\theta(d\alpha - d\beta) - \sin(\alpha+\beta)d\theta \\
\omega^2 &= \sin(\alpha+\beta)\sin\theta\cos\theta(d\alpha - d\beta) + \cos(\alpha+\beta)d\theta \\
\omega^3 &= -\cos^2\theta d\alpha - \sin^2\theta d\beta \\
\omega^4 &= dt
\end{aligned} \tag{3.14}$$

iar cea corespunzătoare lui $\{Y_1, Y_2, Y_3, \partial_t\}$ este

$$\begin{aligned}
\tau^1 &= -\cos(\alpha-\beta)\sin\theta\cos\theta(d\alpha + d\beta) + \sin(\alpha-\beta)d\theta \\
\tau^2 &= -\sin(\alpha-\beta)\sin\theta\cos\theta(d\alpha + d\beta) - \cos(\alpha-\beta)d\theta \\
\tau^3 &= \cos^2\theta d\alpha - \sin^2\theta d\beta \\
\tau^4 &= dt
\end{aligned} \tag{3.15}$$

In cele ce urmează, notăm tetradul (3.14) cu $\omega^\mu (\mu = \overline{1,4})$ şi exprimându-l ca

$$\omega^\mu = \omega^\mu_m dx^m \; ; \; (x^m) = (\alpha, \beta, \theta, t) \;\; m = \overline{1,4} \tag{3.16}$$

obţinem pentru elementul de arc

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\omega^\mu\omega^\nu = g_{\mu\nu}\omega^\mu{}_m\omega^\nu{}_n dx^m dx^n = g_{mn}dx^m dx^n \tag{3.17}$$

expresia cunoscută (1.183, 179)

$$ds^2 = \cos^2\theta(d\alpha)^2 + \sin^2\theta(d\beta)^2 + (d\theta)^2 - (dt)^2$$

Vom introduce 1 - forma conexiunii de spin prin definiţia uzuală

$$\begin{aligned} d\omega^{\mu} &= -w^{\mu}_{\nu} \wedge \omega^{\nu} \\ w_{\mu\nu} &= w_{\mu\nu m} dx^{m} \end{aligned} \tag{3.18}$$

din care, prin comparaţie cu prima ecuaţie Cartan

$$d\omega^{a} + \Gamma^{a}_{b} \wedge \omega^{b} = 0 \tag{3.19}$$

unde

$$\Gamma_{\mu\nu\alpha} = -\varepsilon_{4\mu\nu\alpha} = \varepsilon_{\mu\nu\alpha 4} \tag{3.20}$$

se obţine

$$\begin{aligned} &a) \quad w_{\mu\nu} = \varepsilon_{\mu\nu\rho 4}\omega^{\rho} \; ; \; w_{ij} = -\varepsilon_{ijk}\omega^{k} \\ &b) \quad w_{i4} = 0 \quad , i,j,k = \overline{1,3} \end{aligned} \tag{3.21}$$

Forma $SO(3,1)$ gauge invariantă a ecuaţiei Dirac pentru particula de masă M şi spin $1/2$ este

$$(i\gamma^{\mu}\omega_{\mu}^{\ m}\nabla_{m} - M)\psi = 0 \tag{3.22}$$

unde derivata covariantă ∇_m are expresia

$$\nabla_{m} = \partial_{m} + \frac{i}{2} w_{\mu\nu m}\sigma^{\mu\nu} \tag{3.23}$$

Deoarece matricea $\sigma^{\mu\nu}$ poate fi exprimată în funcţie de matricile γ prin relaţia

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}] \tag{3.24}$$

expresia derivatei covariante devine

$$\nabla_{m} = \partial_{m} - \frac{1}{4} w_{\mu\nu m}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} \tag{3.25}$$

sau, pe componente

$$a)\quad \nabla_i = \partial_i + \frac{1}{4}\varepsilon_{jsi}\gamma^j\gamma^s$$
$$b)\quad \nabla_4 = \partial_4 = \partial_t\,, \tag{3.26}$$

Cu aceste rezultate, operatorul Dirac capătă forma

$$\gamma^\mu\nabla_\mu = \gamma^\mu\omega_\mu^{\ m}\nabla_m = \\ = \gamma^\mu e_\mu + \frac{1}{4}\varepsilon_{ijk}\gamma^i\gamma^j\gamma^k = \gamma^\mu e_\mu + i\frac{3}{2}\gamma^5\gamma^4 \tag{3.27}$$

Astfel, ecuaţia Dirac, pentru particula de spin 1/2, pe varietatea $S^3 \times R$, este

$$\left(i\gamma^\mu e_\mu - \frac{3}{2}\gamma^5\gamma^4 - M\right)\psi = 0 \tag{3.28}$$

şi ea derivă dintr-un lagrangeian de tipul

$$\mathcal{L}_D = \frac{i}{2}\left(e_\mu\overline{\psi}\,\gamma^\mu\,\psi + \overline{\psi}\,\gamma^\mu\,e_\mu\psi - \frac{3}{2}\gamma^5\gamma^4 - M\right)\psi \tag{3.29}$$

unde ψ este spinorul Dirac

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_A \\ \overline{\psi}^{\dot{A}} \end{pmatrix}\,,\ A, \dot{A} = 1, 2 \tag{3.30}$$

Indicii $A, \dot{A}$ se ridică şi se coboară cu ajutorul tensorului antisimetric

$$\varepsilon^{AB} = \varepsilon_{\dot{A}\dot{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.31}$$

Spinorii cu două componente din (3.30) se transformă cu ajutorul reprezentărilor grupului $SL(2, C)$, definit ca

$$SL(2,C) = \{M \in GL(2,C) \mid det\ M = 1\} \tag{3.32}$$

astfel

$$\begin{aligned} \psi_A{}' &= M_A^{\ B}\,\psi_B \\ \overline{\psi}^{\dot{A}}{}' &= (M^{*-1T})^{\dot{A}}_{\ \dot{B}}\,\overline{\psi}^{\dot{B}} \end{aligned} \tag{3.33}$$

Dacă la cele trei matrici Pauli $\{\sigma^i\}_{i=1,2,3}$ ce determină componentele spinului prin

$$S_i = \frac{\sigma^i}{2} \tag{3.34}$$

se adaugă matricea unitate $\sigma^0 = I_2$, vom obţine un set de patru matrici cu indici mixti, $\{\sigma^\mu = \left(\sigma^\mu_{A\dot{B}}\right)\}_{\mu=\overline{1,4}}$ şi încă unul, $\{\overline{\sigma}^\mu = \left(\overline{\sigma}^\mu_{A\dot{B}}\right)\}_{\mu=\overline{1,4}}$ definit prin

$$\left(\begin{aligned} \overline{\sigma}^i &= -\sigma^i \\ \overline{\sigma}^0 &= \sigma^0 \end{aligned}\right. \tag{3.35}$$

In funcţie de acestea, matricile γ în baza Dirac se exprimă ca

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \overline{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \tag{3.36}$$

Următoarele combinaţii

$$\sigma^{\mu\nu}_{2\times 2} = \frac{i}{4}(\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu - \sigma^\nu\overline{\sigma}^\mu) \tag{3.37}$$

şi respectiv

$$\overline{\sigma}^{\mu\nu}_{2\times 2} = \frac{i}{4}(\overline{\sigma}^\mu\sigma^\nu - \overline{\sigma}^\nu\sigma^\mu) \tag{3.38}$$

ce satisfac algebra Lorentz uzuală:

$$\begin{aligned} [\sigma_{\mu\nu},\, \sigma_{\alpha\beta}] &= -(\eta_{\mu\alpha}\sigma_{\nu\beta} - \eta_{\mu\beta}\sigma_{\nu\alpha} - \eta_{\nu\alpha}\sigma_{\mu\beta} + \eta_{\nu\beta}\sigma_{\mu\alpha}) \\ [\sigma_{\mu\nu},\, \gamma_\rho] &= -i(\eta_{\mu\rho}\gamma_\nu - \eta_{\nu\rho}\gamma_\mu) \end{aligned} \tag{3.39}$$

unde $\eta_{\mu\nu}$ este metrica Minkowski $(1,1,1,-1)$, definesc operatorul moment cinetic de spin prin relaţia

$$S_i = \frac{1}{2}\,\varepsilon_{ijk}\,\sigma^{jk} = \frac{i}{4}\,\varepsilon_{ijk}\,\gamma^j\gamma^k \quad \text{cu } i,j,k=\overline{1,3} \tag{3.40}$$

Să revenim acum la cea de a doua metodă de abordare a teoriei fermionilor, având la bază metoda grupurilor Lie, propusă de M. Carmeli şi S. Malin, pentru formularea ecuaţiilor Schrödinger şi Klein - Gordon pe $S^3 \times R$. In acest scop, vom prelua ecuaţia Dirac uzuală, de pe spaţiu - timp plat şi înlocuind operatorul impuls cu operatorul moment cinetic total

$$J_i = L_i + S_i\,, \tag{3.41}$$

vom obţine următoarea formă a ecuaţiei Dirac pe $S^3 \times R$

$$(\gamma^\mu J_\mu - M)\psi = 0 \tag{3.42}$$

care, în urma efectuării calculelor, capătă forma explicită

$$\begin{aligned}(i\gamma^4\partial_t + \gamma^i L_i + \gamma^i S_i - M)\psi &= \\ = (i\gamma^4\partial_t - i\varepsilon_{ijk}\gamma^i x_j \partial_k - \frac{3}{2}\gamma^5\gamma^4 - M)\psi &= 0\end{aligned} \tag{3.43}$$

Pentru sfera S^3 de rază a, ecuaţia Dirac se va scrie deci [8]

$$\left[i\gamma^\mu L_\mu + \frac{3}{2a}\,\gamma^4\gamma^5 - M\right]\psi = 0 \tag{3.44}$$

unde termenul adiţional $(3/2a)\gamma^4\gamma^5\psi$, absent în lucrările lui Carmeli şi Malin, exprimă contribuţia efectelor gravitaţionale de spin. Un astfel de termen nu violează paritatea şi nici simetria combinată CP. Dacă a este raza Universului, el este desigur foarte mic, dar este probabil că a jucat un rol important în stagiul primordial de evoluţie a acestuia.

Operatorii $\{L_\mu\}_{\mu=\overline{1,4}} = \{L_4 = \frac{\partial}{\partial t} = \partial_t,\ L_i\}$ satisfac relaţiile de comutatori [9]

$$\begin{aligned}[L_i,\ L_j] &= \frac{2}{a}\varepsilon_{ij}{}^k L_k \\ [L_4,\ L_i] &= 0\end{aligned} \tag{3.45}$$

unde momentele cinetice $\{L_i\}_{i=\overline{1,3}}$ coincid cu tetradul *right - handed* $\{e_i\}_{i=\overline{1,3}}$ introdus în capitolul 1.

In sfârşit, funcţia de undă ψ, element al produsului tensorial al spaţiului Hilbert $\mathcal{L}^2$ al funcţiilor definite pe S^3 cu $\mathcal{S}_4$, poate fi scrisă în funcţie de spinorii cu două componente ca

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \\ \psi^3 \\ \psi^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi^1 \\ \Psi^2 \end{pmatrix} \tag{3.46}$$

Ecuaţia Dirac (3.44) este echivalentă cu sistemul de ecuaţii

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Psi^1}{\partial t} + \vec{\sigma}\cdot\vec{L}\Psi^1 - \frac{3i}{2a}\Psi^1 + iM\Psi^2 &= 0 \\ \frac{\partial \Psi^2}{\partial t} - \vec{\sigma}\cdot\vec{L}\Psi^2 + \frac{3i}{2a}\Psi^2 + iM\Psi^1 &= 0\end{aligned} \tag{3.47}$$

care, la fel ca în cazul minkowskian, la limita $M = 0$, se decuplează.

De asemenea, ecuaţia (3.44) ne conduce la condiţia *on - shell*

$$L_\mu^2 + M^2 + \frac{\gamma^5}{a}(iL_4 + M\gamma^4) + \frac{3}{4a^2} = 0 \tag{3.48}$$

şi la expresia simbolică a propagatorului fermionic pe $S^3 \times R$

$$S_F = -\frac{i\gamma^\mu L_\mu + M - (2a)^{-1}\gamma^5\gamma^4}{L_\mu^2 + M^2 + a^{-1}\gamma^5(iL_4 + M\gamma^4) + \frac{3}{4}a^{-2}} \tag{3.49}$$

3.2 Zero - modurile câmpului de spin 1/2 în spaţiu - timpul $S^3 \times R$

In cele ce urmează, vom rezolva ecuaţia Dirac (3.44), pentru modurile de energie zero a cuantei câmpului nemasiv. După cum vom vedea, spre deosebire de cazul minkowskian, vidul fermionic pe varietatea S^3 este alcătuit din moduri statice netriviale, cu chiralitate bine definită.

Utilizând parametrizarea (1.177) pentru sfera de rază $a = constant$, consistentă cu metrica (1.179), şi tetradul $\{L_\mu\}_{\mu=\overline{1,4}}$ satisfăcând relaţiile de comutatori (3.45), ecuaţia Dirac (3.44), pentru cazul static, devine

$$[i\gamma^i L_i + \frac{3}{2a}\gamma^4\gamma^5 - M]\psi = 0 \tag{3.50}$$

Vom alege pentru matricile γ reprezentarea Kramers [10]

$$\gamma^4 = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{I} \\ \mathcal{I} & 0 \end{pmatrix}, \; \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.51}$$

şi, exploatând simetria rotaţională $(\alpha + \beta)$, sugerată de operatorul L_3, vom exprima, în mod generic, soluţia statică ψ ca

$$\psi(\alpha+\beta,\theta) = \begin{pmatrix} S_p(\alpha+\beta)f_1(\theta) \\ S_p(\alpha+\beta)f_2(\theta) \\ S_a(\alpha+\beta)f_3(\theta) \\ S_a(\alpha+\beta)f_4(\theta) \end{pmatrix} \tag{3.52}$$

condiţiile de integrabilitate impunând ca singură formă posibilă pentru funcţiile azimutale S_a şi S_p pe

$$\begin{aligned} S_a(\alpha+\beta) &= \exp[i\eta(\alpha+\beta)] \\ & \qquad\qquad , \text{cu } k, \eta = const. \\ S_p(\alpha+\beta) &= k\,\exp[i\eta(\alpha+\beta)] \end{aligned} \tag{3.53}$$

De asemenea, acestea decuplează sistemul diferenţial, conducând la următoarele ecuaţii pentru funcţiile $f_1(\theta)$, $f_2(\theta)$, $f_3(\theta)$, $f_4(\theta)$

$$\frac{df_a}{d\theta} - 2\eta \cot(2\theta) f_a = 0 \quad , \quad a = 1,3$$
$$\frac{df_b}{d\theta} + 2\eta \cot(2\theta) f_b = 0 \quad , \quad b = 2,4 \tag{3.54}$$

împreună cu ecuaţia *seculară* pentru η

$$\eta^4 + \frac{1}{2}\left(\mu^2 - \frac{9}{4}\right)\eta^2 + \frac{1}{16}\left(\mu^2 + \frac{9}{4}\right)^2 = 0 \text{ , cu } \mu = Ma \tag{3.55}$$

Cele două seturi de rădăcini:

$$\eta_{1,2} = \frac{3}{4} \pm i\frac{\mu}{2} \tag{3.56}$$

şi

$$\eta_{3,4} = -\frac{3}{4} \pm i\frac{\mu}{2} \tag{3.57}$$

vor corespunde soluţiilor

$$\psi_1 = C\begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \sin(2\theta)^{-\frac{3}{4}-i\frac{\mu}{2}} \exp\left[-\frac{\mu}{2}(\alpha+\beta)\right] \exp\left[i\frac{3}{4}(\alpha+\beta)\right] \tag{3.58}$$

$$\psi_2 = C\begin{pmatrix} 0 \\ -i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \sin(2\theta)^{-\frac{3}{4}+i\frac{\mu}{2}} \exp\left[\frac{\mu}{2}(\alpha+\beta)\right] \exp\left[i\frac{3}{4}(\alpha+\beta)\right]$$

şi respectiv

$$\psi_3 = C\begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sin(2\theta)^{-\frac{3}{4}+i\frac{\mu}{2}} \exp\left[-\frac{\mu}{2}(\alpha+\beta)\right] \exp\left[-i\frac{3}{4}(\alpha+\beta)\right]$$

$$\psi_4 = C\begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sin(2\theta)^{-\frac{3}{4}-i\frac{\mu}{2}} \exp\left[\frac{\mu}{2}(\alpha+\beta)\right] \exp\left[-i\frac{3}{4}(\alpha+\beta)\right] \tag{3.59}$$

Se observă fără nici o dificultate că periodicitatea în $(\alpha+\beta)$ reclamă, în mod clar, o soluţie de câmp de masă nulă. In sfârşit, condiţia de normare

$$\int_0^{\pi/2} \bar{\psi}\,\gamma_0\,\psi\, 2\pi^2 \sin(2\theta)\, d\theta = 1 \tag{3.60}$$

fixează constanta de integrare

$$C = \frac{1}{\pi\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\Gamma(3/4)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(1/4)}} \tag{3.61}$$

In mod surprinzător, soluţia bispinorială fundamentală $\{\psi_a\}_{a=\overline{1,4}}$ cu $M = 0$ conduce direct la combinaţiile liniare

$$\psi_L^{(up)} = \frac{1}{2}(\psi_1+\psi_2) = C\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \sin(2\theta)^{-3/4} \exp\left[i\frac{3}{4}(\alpha+\beta)\right]$$

$$\psi_L^{(dn)} = \frac{1}{2}(\psi_3+\psi_4) = C\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sin(2\theta)^{-3/4} \exp\left[-i\frac{3}{4}(\alpha+\beta)\right] \tag{3.62}$$

şi

$$\psi_R^{(dn)} = \frac{1}{2}(\psi_1 - \psi_2) = i\,C \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \sin(2\theta)^{-3/4} \exp\left[i\,\frac{3}{4}(\alpha+\beta)\right]$$

$$\psi_R^{(up)} = \frac{1}{2}(\psi_3 - \psi_4) = -i\,C \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \sin(2\theta)^{-3/4} \exp\left[-i\,\frac{3}{4}(\alpha+\beta)\right] \tag{3.63}$$

a căror chiralitate bine definită exprimă conţinutul vidului fermionic de spin 1/2 pe sfera S^3. Spre deosebire de cazul minkowskian, acesta se constituie din moduri statice, netriviale, ale câmpurilor (anti) neutrinice.

3.3 O metodă algebrică, formal - perturbativă de integrare a ecuaţiei Dirac pe spaţiu - timp curb

Generalizând rezultatele paragrafelor anterioare, vom obţine forma $SO(3,1)$ - gauge covariantă a ecuaţiei Dirac pe o 4 - varietate diferenţiabilă pseudoriemanniană, înzestrată cu conexiune Levi - Civita şi vom prezenta o metodă algebrică de construire, din aproape în aproape, a soluţiilor dinamice corespunzătoare [11].

Deşi nu există, încă, o teorie cuantică riguroasă a gravitaţiei, fizica contemporană are nevoie, deopotrivă, atât de Relativitatea Generală cât şi de Teoria Cuantică a Câmpurilor materiale (deocamdată fără

gravitaţie) pentru a descrie dinamica Universului la toate scările sale de existenţă. Lucrări recente sunt dedicate efectelor cuantice de creare de particule în diverse modele cosmologice (Leigh şi Rattazzi, 1995). Dar, ecuaţia Dirac fiind invariantă conformal, precum cea descriind fotonii şi neutrinii, o expansiune izotropică a Universului nu dă naştere acestor particule. In Modelul Standard Cosmologic, plasma care umplea Universul timpuriu era formată atât din bozoni cât şi din fermioni de foarte mare energie. Din acest motiv, formularea general covariantă a celor două ecuaţii, Dirac şi Klein - Gordon, precum şi integrarea lor, joacă un rol esenţial în surprinderea *in vitro*, la curburi şi energii mari, a dinamicii acestor câmpuri.

3.3.1 Stabilirea convenţiilor

Metrica uzuală a spaţiu - timpului

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k \tag{3.64}$$

poate fi adusă la forma

$$ds^2 = \eta_{ab} \omega^a \omega^b \tag{3.65}$$

prin definirea adecvată a tetradului dual pseudo - ortonormal

$$\omega^a = \omega^a_i dx^i \tag{3.66}$$

corespunzător, prin

$$\langle \omega^a, e_b \rangle = \delta^a_b \ , \tag{3.67}$$

bazei tetradice pseudo - ortonormale

$$e_a = e_a^{\ i} \frac{\partial}{\partial x^i} \tag{3.68}$$

In general, 1 - forma coeficienţilor de conexiune, $\Gamma^c{}_{ab}$, definiţi prin

$$\nabla_b e_a = \Gamma^c{}_{ab} e_c \tag{3.69}$$

se calculează cu ajutorul primei ecuaţii de structură Cartan

$$d\omega^a = -\Gamma^a_{\ b} \wedge \omega^b \tag{3.70}$$

în absenţa torsiunii, adică în cazul unei conexiuni simetrice.

Deoarece, în raport cu baza tensorială rigidă $\{\omega^a \otimes \omega^b\}_{a,b=\overline{1,4}}$, metrica

$$\mathbf{g} = \eta \tag{3.71}$$

este constantă (minkowskiană), condiţia metrică pentru conexiunea liniară Γ este

$$g_{ab;c} = 0$$

sau

$$\Gamma_{(ab)c} = 0 \tag{3.72}$$

exprimând cunoscuta antisimetrie, în primii doi indici, a coeficienţilor de conexiune în raport cu un reper rigid.

In acord cu Principiul Echivalenţei, în formulare locală, orice ecuaţie de câmp, Lorentz - covariantă în spaţiul Minkowski, poate fi exprimată într-o formă general gauge - covariantă într-un spaţiu - timp curb, în raport cu o bază pseudo - ortonormală, pur şi simplu prin înlocuirea derivatelor parţiale cu cele $SO(3,1)$ gauge - covariante, adică

$$\partial_a \longrightarrow \nabla_a \tag{3.73}$$

sau, utilizând notaţia condensată

$$(\cdot)_{,a} \longrightarrow (\cdot)_{;a} \tag{3.74}$$

Astfel, ecuaţiile Dirac în spaţiul MInkowski

$$\gamma^i \psi_{,i} + m\psi = 0 \; ; \; \bar{\psi}_{,i}\gamma^i - m\bar{\psi} = 0 \tag{3.75}$$

capătă forma $SO(3,1)$ - gauge covariantă

$$\gamma^a \psi_{;a} + m\psi = 0 \; ; \; \bar{\psi}_{;a}\gamma^a - m\bar{\psi} = 0 \tag{3.76}$$

unde, după cum am precizat mai sus,

$$\psi_{;a} = \psi_{|a} + \frac{1}{4}\Gamma_{bca}\gamma^b\gamma^c\psi \; ; \; \bar{\psi}_{;a} = \bar{\psi}_{|a} - \frac{1}{4}\bar{\psi}\gamma^b\gamma^c\Gamma_{bca}, \tag{3.77}$$

Vom considera matricile Dirac, γ, satisfăcând algebra

$$\gamma_a\gamma_b + \gamma_b\gamma_a = 2\eta_{ab}, \tag{3.78}$$

în cea mai uzuală reprezentare

$$\begin{gathered} \gamma^\mu = \gamma_\mu = -i\beta\alpha^\mu \\ , \; \mu = 1,2,3 \\ \gamma^4 = -\gamma_4 = -i\beta \end{gathered} \tag{3.79}$$

cu

$$\alpha^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \sigma^\mu & 0 \end{pmatrix} \; ; \; \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{3.80}$$

σ^μ fiind matricile Pauli. In consecinţă, $\gamma^5 = \gamma_5$ fiind în general definită prin

$$\gamma^5 = -\frac{i}{4!}\varepsilon_{abcd}\gamma^a\gamma^b\gamma^c\gamma^d, \text{ cu } \varepsilon_{1234} = -\varepsilon^{1234} = -1 \,, \tag{3.81}$$

capătă forma concretă

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.82}$$

3.3.2 Soluţia dinamică de ordinul întâi

In cele ce urmează, vom obţine soluţia ecuaţiei (3.76), printr-o metodă algebrică şi vom construi imaginea sa în spaţiul impulsului.

Pentru început, să scriem soluţia dinamică de ordinul zero. Neglijând Γ în expresiile derivatelor covariante din (3.77), ecuaţia (3.76) devine

$$\gamma^a \psi_{|a} + m\psi = 0 \tag{3.83}$$

putând fi tratată formal, la nivel algebric, ca şi echivalentul său minkowskian

$$\mathrm{D}_+^{(0)}\psi = 0\ ;\ \text{cu } \mathrm{D}_+^{(0)}(x) = \gamma^i\partial_i + m \tag{3.84}$$

Astfel,

$$\mathrm{D}_+^{(0)}(x)[e^{ipx}] = i(\hat{p} - im)e^{ipx} \text{ cu } \hat{p} = \gamma \cdot p \tag{3.85}$$

şi presupunând că $\left[\mathrm{D}_+^{(0)}(x)\right]^{-1}$ este inversul lui $\mathrm{D}_+^{(0)}(x)$, rezultă

$$i\left[\mathrm{D}_+^{(0)}(x)\right]^{-1}(e^{ipx})(\hat{p} - im) = e^{ipx}$$

adică

$$\left[\mathrm{D}_+^{(0)}(x)\right]^{-1}(e^{ipx}) = -i\frac{\hat{p} + im}{p^2 + m^2}e^{ipx} \tag{3.86}$$

deoarece

$$(\hat{p} + im)(\hat{p} - im) = p^2 + m^2 \tag{3.87}$$

Scriem acum pe (3.76) sub forma

$$\gamma^a \psi_{|a} + m\psi = -\frac{1}{4}\Gamma_{bca}\gamma^a\gamma^b\gamma^c\psi \tag{3.88}$$

sau

$$\mathrm{D}_+(x)\psi(x) = \frac{1}{2}\Gamma_a^*(x)\gamma^a\psi(x), \tag{3.89}$$

unde am utilizat identitatea

$$\gamma^a\gamma^b\gamma^c = \eta^{ab}\gamma^c + \eta^{bc}\gamma^a - \eta^{ca}\gamma^b + i\varepsilon^{abcd}\gamma_d\gamma_5 \tag{3.90}$$

care aduce membrul drept al lui (3.88) la

$$-\frac{1}{4}\Gamma_{bca}\gamma^a\gamma^b\gamma^c\psi = \frac{1}{2}\left[\eta^{bc}\Gamma_{abc}\gamma^a - \frac{i}{2}\varepsilon_a{}^{bcd}\Gamma_{bcd}\gamma^5\gamma^a\right]\psi \tag{3.91}$$

Definind conexiunea autoduală

$$\Gamma^*_a = \eta^{bc}\Gamma_{abc} - \frac{i}{2}\varepsilon_a{}^{bcd}\Gamma_{bcd}\gamma^5 = \Gamma_{a..} - \tilde{\Gamma}_a\gamma^5, \tag{3.92}$$

efectuăm transformata Fourier a lui $\Gamma^*(x)$ şi $\psi(x)$

$$\begin{aligned} D_+(x)\psi(x) &= \frac{1}{2}\frac{1}{(2\pi)^2}\int \Gamma^*_a(q)\gamma^a(\hat{p}+im) \\ &\quad \delta(p^2+m^2)e^{i(p+q)x}a(p)\, d^4q d^4p \end{aligned} \tag{3.93}$$

Astfel, în primul ordin de aproximaţie, soluţia ecuaţiei (3.76) devine

$$\psi(x) = \varphi(x) + \chi(x) \tag{3.94}$$

unde $\varphi(x)$ este soluţia de ordin zero a operatorului $D_+(x)$

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int (\hat{p}+im)\frac{a(\vec{p})}{\sqrt{2E_p}}e^{ipx}\, d^3p \tag{3.95}$$

iar

$$\begin{aligned} \chi(x) &= -\frac{i/2}{(2\pi)^2}\int \frac{(\hat{q}+\hat{p})+im}{(q+p)^2+m^2}\Gamma^*_a(q)\gamma^a(\hat{p}+im) \\ &\quad \delta(p^2+m^2)e^{i(p+q)x}a(p)\, d^4q d^4p \end{aligned} \tag{3.96}$$

Imaginea lui $\chi(x)$ în spaţiul impulsului

$$\begin{aligned} \chi(P) &= -\frac{i/2}{(2\pi)^6}\int \frac{(\hat{q}+\hat{p})+im}{(q+p)^2+m^2}\Gamma^*_a(q)\gamma^a(\hat{p}+im) \\ &\quad \delta(p^2+m^2)e^{i(q+p-P)x}a(p)\, d^4q d^4p d^4x \\ &= -\frac{i/2}{(2\pi)^2}\int \frac{\hat{P}+im}{P^2+m^2}\Gamma^*_a(P-p)\gamma^a(\hat{p}+im)\delta(p^2+m^2)a(p)\, d^4p \end{aligned}$$

capătă forma

$$\chi_+(P) = -\frac{i/2}{(2\pi)^2}\int \frac{\hat{P}+im}{P^2+m^2}\Gamma^*_a(P-p)\gamma^a(\hat{p}+im)\frac{a(p)}{\sqrt{2E_p}}\,d^3p \quad (3.97)$$

pe care este convenabil să o exprimăm în forma matricială

$$\chi_+(P) = -\frac{i/2}{(2\pi)^2}\frac{\hat{P}+im}{P^2+m^2}\int \Gamma^*_a(P-p)\gamma^a(\hat{p}+im)\frac{1}{\sqrt{2E_p}}\,d^3p \quad (3.98)$$

In concluzie, soluţia de ordinul întâi (3.94) poate fi scrisă ca următoarea matrice

$$\psi_+(P) = \frac{\hat{P}+im}{\sqrt{2E_P}} - \frac{i/2}{(2\pi)^2}\frac{\hat{P}+im}{P^2+m^2}\int \Gamma^*_a(P-p)\gamma^a(\hat{p}+im)\frac{1}{\sqrt{2E_p}}\,d^3p \quad (3.99)$$

Aceeaşi procedură poate fi urmată şi pentru partea adjunctă a ecuaţiei Dirac (3.76). Astfel, pornind de la

$$D_-\bar{\psi}(x) = \frac{1}{2}\bar{\psi}(x)\gamma^a\Gamma^*_a(x), \quad (3.100)$$

unde

$$D_-\bar{\psi}(x) = \bar{\psi}_{;a}\gamma^a - m\bar{\psi} \quad (3.101)$$

îl aducem pe (3.100) la forma

$$D_-\bar{\psi}(x) = \frac{1/2}{(2\pi)^4}\int \bar{a}(p)\delta(p^2+m^2)(\hat{p}+im)\gamma^a\Gamma^*_a(q)\, e^{-i(p-q)x}\,d^4p\,d^4q \quad (3.102)$$

Observăm că

$$D_-^{-1}(x)[e^{-i(p-q)x}] = i\frac{(\hat{p}-\hat{q})+im}{(p-q)^2+m^2}e^{-i(p-q)x} \quad (3.103)$$

şi obţinem expresia

$$\bar{\chi}(x) = \frac{1/2}{(2\pi)^4}\int \bar{a}(p)\delta(p^2+m^2)(\hat{p}+im)\gamma^a\Gamma^*_a(q) \frac{\hat{p}-\hat{q}+im}{(p-q)^2+m^2}e^{-i(p-q)x}\, d^4p d^4q \tag{3.104}$$

care, în reprezentarea de impuls definită prin

$$\bar{\chi}(P) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int \bar{\chi}(x)e^{iPx}d^4x, \tag{3.105}$$

capătă forma concretă

$$\begin{aligned}\bar{\chi}(P) &= \frac{1/2}{(2\pi)^4}\int \bar{a}(p)\delta(p^2+m^2)(\hat{p}+im)\gamma^a\Gamma^*_a(q) \\ &\quad \frac{\hat{p}-\hat{q}+im}{(p-q)^2+m^2}\delta(P-(p-q))\, d^4p d^4q \\ &= \frac{i/2}{(2\pi)^2}\int \bar{a}(p)\delta(p^2+m^2)(\hat{p}+im)\gamma^a\Gamma^*_a(P-p)\frac{\hat{P}+im}{P^2+m^2}\, d^4p\end{aligned} \tag{3.106}$$

adică

$$\bar{\chi}(P) = \frac{i/2}{(2\pi)^2}\int \frac{d^3p}{\sqrt{2E_p}}\, \bar{a}(p)(\hat{p}+im)\gamma^a\Gamma^*_a(P-p)\frac{\hat{P}+im}{P^2+m^2} \tag{3.107}$$

Ca şi în cazul precedent, este convenabil să exprimăm, atât pe (3.106) cât şi soluţia în primul ordin de aproximaţie, în formulare matricială, adică

$$\bar{\chi}_+(P) = \frac{i/2}{(2\pi)^2}\int \frac{d^3p}{\sqrt{2E_p}}\, (\hat{p}+im)\gamma^a\Gamma^*_a(P-p)\frac{\hat{P}+im}{P^2+m^2} \tag{3.108}$$

şi

$$\bar{\psi}_+(P) = \frac{\hat{P}+im}{\sqrt{2E_P}} + \frac{i/2}{(2\pi)^2}\int \frac{d^3p}{\sqrt{2E_p}}\, (\hat{p}+im)\gamma^a\Gamma^*_a(P-p)\frac{\hat{P}+im}{P^2+m^2} \tag{3.109}$$

Formalismul dezvoltat în acest paragraf este general în raport cu imaginile Fourier generalizate ale componentelor 1-formei de conexiune. Astfel, de îndată ce s-a obţinut setul complet, ortonormal, de soluţii ale ecuaţiei Dirac neperturbate (3.83), orice câmp gravitaţional poate fi inclus în teorie, ca o perturbaţie.

3.4 Geometrodinamica $SO(3,1) \times SU(N)$ - gauge invariantă a câmpurilor Yang - Mills şi Rarita - Schwinger

Acest paragraf îşi propune să ilustreze modul în care prin metoda algebrelor Lie, motivată de proprietăţile de simetrie înaltă ale sferei S^3, varietate a lui $SU(2)$, se poate construi o teorie $SO(3,1) \times SU(N)$ gauge - invariantă pentru câmpurile fermionice de spin superior. In lagrangeianul Rarita - Schwinger, $SU(N)$ - gauge invariant, vom pune în evidenţă o serie de termeni suplimentari, absenţi în teoria minkowskiană, datoraţi efectelor gravitaţionale de spin şi alegerii bazei pseudo - ortonormale [12].

Pentru sfera S^3, cu raza unitate, vom folosi parametrizarea (1.177), consistentă cu metrica (1.179). Proprietăţile de simetrie ne sugerează utilizarea triadului *right - handed* $\{e_i\}_{i=\overline{1,3}}$ satisfăcând relaţiile de comutatori (1.181). Prin adăugarea lui $e_4 = \partial_t$, vom introduce baza tetradică pseudo - ortonormală $\{e_{\mu=\overline{1,4}}\}$ ce satisface algebra $SU(2) \times T$ (unde T reprezintă grupul translaţiilor temporale).

Formalismul dezvoltat în acest paragraf este general în raport cu imaginile Fourier generalizate ale componentelor 1-formei de conexiune. Astfel, de îndată ce s-a obţinut setul complet, ortonormal, de soluţii ale ecuaţiei Dirac neperturbate (3.83), orice câmp gravitaţional poate fi inclus în teorie, ca o perturbaţie.

3.4 Geometrodinamica $SO(3,1) \times SU(N)$ - gauge invariantă a câmpurilor Yang - Mills şi Rarita - Schwinger

Acest paragraf îşi propune să ilustreze modul în care prin metoda algebrelor Lie, motivată de proprietăţile de simetrie înaltă ale sferei S^3, varietate a lui $SU(2)$, se poate construi o teorie $SO(3,1) \times SU(N)$ gauge - invariantă pentru câmpurile fermionice de spin superior. In lagrangeianul Rarita - Schwinger, $SU(N)$ - gauge invariant, vom pune în evidenţă o serie de termeni suplimentari, absenţi în teoria minkowskiană, datoraţi efectelor gravitaţionale de spin şi alegerii bazei pseudo - ortonormale [12].

Pentru sfera S^3, cu raza unitate, vom folosi parametrizarea (1.177), consistentă cu metrica (1.179). Proprietăţile de simetrie ne sugerează utilizarea triadului *right - handed* $\{e_i\}_{i=\overline{1,3}}$ satisfăcând relaţiile de comutatori (1.181). Prin adăugarea lui $e_4 = \partial_t$, vom introduce baza tetradică pseudo - ortonormală $\{e_{\mu=\overline{1,4}}\}$ ce satisface algebra $SU(2) \times T$ (unde T reprezintă grupul translaţiilor temporale).

Fie G un grup Lie simplu cu algebra Lie asociată

$$[T_a,\, T_b] = i f_{ab}^{\ c} T_c\ ,\quad a,b,c = \overline{1,n} \tag{3.110}$$

Tensorul Yang - Mills corespunzător

$$\begin{aligned} F^a_{\mu\nu} &= e_\mu A^a_\nu - e_\nu A^a_\mu + g\, f^a_{bc} A^b_\mu A^c_\nu + 2\,\varepsilon_{\alpha\mu\nu 4} A^{\alpha a} = \\ &= \tilde{F}^a_{\mu\nu} + 2\,\varepsilon_{\alpha\mu\nu 4} A^{\alpha a} \end{aligned} \tag{3.111}$$

comparat cu forma sa uzuală minkowskiană, $\tilde{F}^a_{\mu\nu}$, conţine un termen suplimentar, datorat necomutativităţii vectorilor $\{e_i\}_{i=\overline{1,3}}$.

In consecinţă şi lagrangeianul Yang - Mills

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{YM} &= -\frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{\mu\nu}_a = -(\tilde{F}^a_{\mu\nu} + 2\varepsilon_{\alpha\mu\nu 4} A^{\alpha a})(\tilde{F}^{\mu\nu}_a + 2\varepsilon^{\beta\mu\nu 4} A_{a\beta}) = \\ &= \tilde{\mathcal{L}}_{YM} - \varepsilon_{\alpha\mu\nu 4} \tilde{F}^{\mu\nu}_a A^{a\alpha} - 2(A^a_\alpha A^\alpha_a - A^\alpha_4 A^4_\alpha) \end{aligned} \tag{3.112}$$

conţine termenii suplimentari, $-\varepsilon_{\alpha\mu\nu 4} \tilde{F}^{\mu\nu}_a A^{a\alpha} - 2(A^a_\alpha A^\alpha_a - A^\alpha_4 A^4_\alpha)$, absenţi în spaţiul Minkowski.

In spaţiul plat, particula de spin 3/2 este descrisă de lagrangeianul Rarita - Schwinger

$$\tilde{\mathcal{L}}_{RS} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\eta\rho\mu\nu} \overline{\psi}_\eta \gamma_5 \gamma_\rho \partial_\mu \psi_\nu \tag{3.113}$$

Aşa cum am arătat în primul paragraf al acestui capitol, formularea teoriei pe S^3, presupune trecerea de la reprezentarea de impuls la reprezentarea de moment cinetic. In consecinţă, vom înlocui derivatele obişnuite $\{\partial_\mu\}$ cu operatorii moment cinetic total $\{J_\mu\}$ daţi de relaţia (3.41), unde operatorii de spin se exprimă în funcţie de matricile Dirac $\{\gamma^\mu\}$ prin

$$S_\mu = \frac{i}{2} \varepsilon_{\mu\alpha\beta 4} \Sigma^{\alpha\beta}\ ;\ \Sigma^{\alpha\beta} = \frac{i}{4}\left[\gamma^\alpha,\, \gamma^\beta\right]. \tag{3.114}$$

Forma $SU(N)$ gauge - invariantă a lagrangeianului Rarita - Schwinger va fi deci

$$\mathcal{L}_{RS} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\eta\rho\mu\nu}\overline{\psi}_\eta\gamma_5\gamma_\rho\, D_\mu\psi_\nu \;-\; \frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu}_a \tag{3.115}$$

Derivata covariantă

$$D_\mu\psi_\nu = \nabla_\mu\psi_\nu \;+\; igB_\mu\psi_\nu\,, \tag{3.116}$$

în care am utilizat notaţia

$$B_\mu = A^a_\mu T_a\,,\quad a=\overline{1,n}\,, \tag{3.117}$$

conţine derivata covariantă Levi - Civita

$$\nabla_\mu\psi_\nu \;=\; e_\mu\psi_\nu \;+\; \psi^\rho\Gamma_{\nu\rho\mu} \tag{3.118}$$

Cu aceste consideraţii, lagrangeianul particulei de spin 3/2 capătă forma explicită

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{RS} \;&=\; \frac{1}{2}\varepsilon^{\eta\rho\mu\nu}\overline{\psi}_\eta\gamma_5\gamma_\rho\left[e_\mu\psi_\nu \;+\; \varepsilon_{\nu\sigma\mu4}\psi^\sigma \;-\; \frac{1}{4}\varepsilon_{\mu\alpha\beta4}\gamma^\alpha\gamma^\beta\psi_\nu\right] \;+\\ &+\; ig\varepsilon^{\eta\rho\mu\nu}\overline{\psi}_\eta\gamma_5\gamma_\rho\psi_\nu B_\mu \;-\; \frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu}_a\end{aligned} \tag{3.119}$$

conducând la ecuaţia Rarita - Schwinger pe $S^3\times R$, în formulare $SO(3,1)\times G$ gauge - invariantă,

$$\begin{aligned}\varepsilon^{\eta\rho\mu\nu}\gamma_5\gamma_\rho(e_\mu+igB_\mu)\psi_\nu \;-\; \frac{7}{2}\gamma_5\gamma^\mu\psi_\mu\delta^\eta_4 \;+\; \frac{3}{2}\gamma_5\gamma_4\psi^\eta \;+\\ +\; \frac{3}{2}\gamma_5\gamma^\eta\psi_4 \;+\; \frac{1}{2}\gamma_5\gamma_4\gamma^\eta\gamma^\mu\psi_\mu \;=\; 0\end{aligned} \tag{3.120}$$

Dacă se aplică în mod mecanic, fără a lua în considerare spinul, metoda descrisă de M. Carmeli şi S. Malin [4], se obţine o ecuaţie Rarita - Schwinger de tipul

$$\varepsilon^{\eta\rho\mu\nu}\gamma_5\gamma_\rho(e_\mu+igB_\mu)\psi_\nu \;=\; 0 \tag{3.121}$$

omiţându-se termenii adiţionali

$$T = -\frac{7}{2}\gamma_5\gamma^\mu\psi_\mu\delta^\eta_4 + \frac{3}{2}\gamma_5\gamma_4\psi^\eta + \frac{3}{2}\gamma_5\gamma^\eta\psi_4 + \frac{1}{2}\gamma_5\gamma_4\gamma^\eta\gamma^\mu\psi_\mu \quad (3.122)$$

Acesta apare în teorie ca rezultat al acţiunii următoarelor două expresii:

- prima

$$T_S = -\frac{3}{2}\gamma_5\gamma^\mu\psi_\mu\delta^\eta_4 - \frac{1}{2}\gamma_5\gamma_4\psi^\eta + \frac{3}{2}\gamma_5\gamma^\eta\psi_4 + \frac{1}{2}\gamma_5\gamma_4\gamma^\eta\gamma^\mu\psi_\mu\,, \quad (3.123)$$

  care în cazul câmpului Dirac devine $-(3/2)\gamma_5\gamma_4\psi$, absent la M. Carmeli şi S. Malin, exprimă efectele de spin,

- în timp ce a doua

$$T_\Gamma = -2\gamma_5\gamma^\mu\psi_\mu\delta^\eta_4 + 2\gamma_5\gamma_4\psi^\eta \quad (3.124)$$

  este pur gravitaţional.

In ecuaţia Rarita - Schwinger (3.120) considerăm $\eta = i$ şi avem

$$\varepsilon^{i\rho\mu\nu}\gamma_5\gamma_\rho(e_\mu + igB_\mu)\psi_\nu + \frac{3}{2}\gamma_5\gamma_4\psi^i + \frac{3}{2}\gamma_5\gamma^i\psi_4 + \frac{1}{2}\gamma_5\gamma_4\gamma^i\gamma^\mu\psi_\mu = 0 \quad (3.125)$$

iar, pentru $\eta = 4$, obţinem

$$\varepsilon^{4ijk}\gamma_5\gamma_i(e_j + igB_j)\psi_k - 3\gamma_5\gamma^i\psi_i = 0 \quad (3.126)$$

Rezultatele de mai sus pot fi particularizate pentru diferite cazuri de interes fizic, cum ar fi cel corespunzător grupului G de tipul $SU(2)$, $SU(2) \times U(1)$ sau $SU(3)$.

Bibliografie

[1] Sen, D., 1986, *J. Math. Phys.* **27**, 472.

[2] Carmeli, M., 1985, *Found. Phys.* **15**, 175.

[3] Carmeli, M., 1985, *Found. Phys.* **15**, 185.

[4] Carmeli, M., and Malin, S., 1985, *Found. Phys.* **15**, 1019.

[5] Carmeli, M., and Malin, S., 1986, *Found. Phys.* **16**, 791.

[6] Carmeli, M., and Malin, S., 1987, *Found. Phys.* **17**, 193.

[7] Carmeli, M., and Malin, S., 1987, *Found. Phys.* **17**, 407.

[8] Dariescu, M.A., Dariescu, C., and Gottlieb, I., 1995, *Found. Phys.* **25**, 957.

[9] Zet,G., Pasnicu, C., and Agop, M., 1991, *Found. Phys.* **21**, 473.

[10] Kramers, H.A., 1937, *Proc. Amsterdam Acad.* **40**, 814.

[11] Dariescu, C., and Dariescu, M.A., 1997, *Rom. Astron. J.* **7**, (*sub tipar*).

Cuprins

4 CAMPUL ELECTROMAGNETIC **119**

4.1 Câmpul Maxwell rotaţional simetric 119

4.1.1 Ecuaţiile Maxwell cu simetrie rotaţională pe background $S^3 \times R$ 120

4.1.2 Modurile longitudinale de vid 123

4.1.3 Modurile transversale rotaţional - simetrice ale câmpului Maxwell 126

4.2 Radiaţia efectivă a câmpului electromagnetic 131

4.2.1 Etalonul transversal, bidimensional, rotaţional simetric 132

4.2.2 Soluţia generală şi expresiile componentelor esenţiale ale tensorului electromagnetic 134

4.2.3 Radiaţia efectivă a câmpului electromagnetic, cu gauge transversal bidimensional, în Universul $S^3 \times R$ 143

4.3 Ecuaţiile câmpului electromagnetic pe $S^3 \times R$ în formulare canonică 151

Capitolul 4

CAMPUL ELECTROMAGNETIC

4.1 Câmpul Maxwell rotaţional simetric

Scopul acestei analize este de a lua în discuţie diferitele soluţii analitice ale ecuaţiilor Maxwell, în spaţiu - timpul $S^3 \times R$ static [1-3]. Motivaţia interesului nostru pentru câmpul vectorial nu este numai în scopul de a completa imaginea câmpurilor studiate în paragrafele anterioare, ci constă şi în faptul că fotonul este cuanta unui câmp tipic oricărei teorii gauge ce unifică principalele interacţiuni din natură, putând fi uşor generalizat la câmpul Yang - Mills [4].

In continuare, ne vom ocupa de modurile transversale ale câmpul electromagnetic cu simetrie rotaţională [1,2]. Metoda folosită conduce, simultan, la două cazuri particulare şi anume, la modurile longitudinale de vid şi la câmpul electrostatic cu simetrie rotaţională, pe $S^3 \times R$.

4.1.1 Ecuaţiile Maxwell cu simetrie rotaţională pe background $S^3 \times R$

Vom utiliza parametrizarea (1.177), consistentă cu metrica sferei S^3, de rază $a = const. \in R_+$ ce posedă un grup de mişcare $G_6 = O(4)$ având vectorii Killing

$$
\begin{aligned}
a) \quad & K_{(1)} = \cos(\alpha+\beta)\frac{\partial}{\partial\theta} + \sin(\alpha+\beta)\left[\tan\theta\frac{\partial}{\partial\alpha} - \cot\theta\frac{\partial}{\partial\beta}\right] \\
b) \quad & K_{(2)} = -\sin(\alpha+\beta)\frac{\partial}{\partial\theta} + \cos(\alpha+\beta)\left[\tan\theta\frac{\partial}{\partial\alpha} - \cot\theta\frac{\partial}{\partial\beta}\right] \\
c) \quad & K_{(3)} = \cos(\alpha-\beta)\frac{\partial}{\partial\theta} + \sin(\alpha-\beta)\left[\tan\theta\frac{\partial}{\partial\alpha} + \cot\theta\frac{\partial}{\partial\beta}\right] \\
d) \quad & K_{(4)} = -\sin(\alpha-\beta)\frac{\partial}{\partial\theta} + \cos(\alpha-\beta)\left[\tan\theta\frac{\partial}{\partial\alpha} + \cot\theta\frac{\partial}{\partial\beta}\right] \\
e) \quad & K_{(5)} = \frac{\partial}{\partial\alpha} \\
f) \quad & K_{(6)} = \frac{\partial}{\partial\beta}.
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

In acord cu Principiul Cosmologic, considerând S^3 ca o hipersuprafaţă de timp cosmologic constant, metrica lorentziană a Universului S^3 static se obţine, evident, prin adăugarea unei direcţii temporale, ortogonale şi plate, $-(dt)^2$ metricii (1.179) care acum posedă, pe lângă vectorii Killing (4.1), unul în plus, *time - like*,

$$K_{(7)} = \frac{\partial}{\partial t} \tag{4.2}$$

ce corespunde invarianţei în raport cu translaţiile temporale.

Ca şi în cazul capitolelor precedente, vom lucra cu aceeaşi bază tetradică, satisfăcând algebra (1.186) [5].

O soluţie rotaţional simetrică a ecuaţiilor Maxwell, pe spaţiu - timpul $S^3 \times R$, înseamnă practic un câmp electromagnetic ce satisface condiţiile minimale de simetrie

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_{\frac{\partial}{\partial\alpha}} F)^{ik} &= \frac{\partial F^{ik}}{\partial\alpha} \equiv 0\\ (\mathcal{L}_{\frac{\partial}{\partial\beta}} F)^{ik} &= \frac{\partial F^{ik}}{\partial\beta} \equiv 0; (\forall)\ i,k = \overline{1,4}\end{aligned} \tag{4.3}$$

în raport cu vectorii Killing (4.1.e,f), unde

$$F^{ik} = g^{ij}A_{,j}^{k} - g^{kj}A_{,j}^{i} - \left(g^{ij}g_{,j}^{km} - g^{kj}g_{,j}^{im}\right)A_m \tag{4.4}$$

sunt componentele tensorului electromagnetic F, în raport cu baza tensorială canonică

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x^i} \otimes \frac{\partial}{\partial x^k}\right\}_{i,k=\overline{1,4}} \tag{4.5}$$

cu $x^1 = \theta$, $x^2 = \alpha$, $x^3 = \beta$, $x^4 = t$ şi prin $\cdot_{,j}$ am notat $\frac{\partial}{\partial x^j}$ Astfel, baza canonică va fi

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x^1} &= \frac{\partial}{\partial\theta}\\ \frac{\partial}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial\alpha}\\ \frac{\partial}{\partial x^3} &= \frac{\partial}{\partial\beta}\\ \frac{\partial}{\partial x^4} &= \frac{\partial}{\partial t}\end{aligned} \tag{4.6}$$

Deoarece orice funcţie definită pe S^3 este 2π - periodică, în α şi β, vom obţine, din (4.3) şi (4.4), condiţiile suficiente

$$\begin{aligned}\frac{\partial A^i}{\partial\alpha} &\equiv 0\\ \frac{\partial A^i}{\partial\beta} &\equiv 0\ ;\ (\forall)\ i = \overline{1,4}\end{aligned} \tag{4.7}$$

pe care trebuie să le satisfacă potenţialul câmpului electromagnetic, A, pentru a fi rotaţional simetric în spaţiu - timpul $S^3 \times R$.

Astfel, componentele esenţiale ale tensorului electromagnetic au expresiile concrete

$$
\begin{aligned}
a)\quad F^{12} &= \frac{1}{a^2}\left[\frac{\partial A^2}{\partial \theta} - 2\tan\theta A^2\right]\\
b)\quad F^{13} &= \frac{1}{a^2}\left[\frac{\partial A^3}{\partial \theta} + 2\cot\theta A^3\right]\\
c)\quad F^{14} &= \frac{1}{a^2}\frac{\partial A^4}{\partial \theta} + \frac{\partial A^1}{\partial t}\\
d)\quad F^{24} &= \frac{\partial A^2}{\partial t}\\
e)\quad F^{34} &= \frac{\partial A^3}{\partial t}
\end{aligned}
\tag{4.8}
$$

ce aduc ecuaţiile Maxwell fără surse

$$
\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^k}\left[\sqrt{-g}F^{ik}\right] = 0 \tag{4.9}
$$

la forma explicită

$$
\begin{aligned}
a)\quad & \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{a^2}\frac{\partial A^4}{\partial \theta} + \frac{\partial A^1}{\partial t}\right] = 0\\
b)\quad & \frac{1}{\sin\theta\cos\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left\{\frac{\sin\theta\cos\theta}{a^2}\left[\frac{\partial A^2}{\partial \theta} - 2\tan\theta A^2\right]\right\} - \frac{\partial^2 A^2}{\partial t^2} = 0\\
c)\quad & \frac{1}{\sin\theta\cos\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left\{\frac{\sin\theta\cos\theta}{a^2}\left[\frac{\partial A^3}{\partial \theta} + 2\cot\theta A^3\right]\right\} - \frac{\partial^2 A^3}{\partial t^2} = 0\\
d)\quad & \frac{\partial}{\partial \theta}\left\{\sin\theta\cos\theta\left[\frac{1}{a^2}\frac{\partial A^4}{\partial \theta} + \frac{\partial A^1}{\partial t}\right]\right\} = 0
\end{aligned}
\tag{4.10}
$$

iar condiţia de etalonare Lorentz devine

$$
\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}[\sin\theta\cos\theta A^1] + \frac{\partial A^4}{\partial t} = 0 \tag{4.11}
$$

Din (4.10), este uşor de observat că componentele A^2, A^3 sunt deja decuplate şi de asemenea că ecuaţiile (4.10.a,d) şi (4.11) conduc la sistemul

$$\begin{aligned} a)\quad & A^4 = V(\theta) - \frac{1}{\sin\theta\cos\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\cos\theta\int A^1 dt\right] \\ b)\quad & \frac{1}{a^2}\frac{\partial A^4}{\partial\theta} + \frac{\partial A^1}{\partial t} = \frac{C}{\sin\theta\cos\theta} \end{aligned} \tag{4.12}$$

unde $C = const \in R$, iar $V(\theta)$ este potenţialul câmpului electrostatic cu simetrie rotaţională, în spaţiu - timpul (static) $S^3 \times R$.

4.1.2 Modurile longitudinale de vid

Inainte de a trece la analiza modurilor transversale A^2, A^3, să investigăm, în detaliu, soluţia analitică a sistemului (4.12), deoarece ea va pune în evidenţă o trăsătură foarte interesantă a câmpului electromagnetic, cu simetrie rotaţională, pe topologia $S^3 \times R$, şi anume, modurile (netriviale) longitudinale, de vid [1,2].

Inlocuind pe (4.12.a) în (4.12.b), obţinem pentru componenta A^1 o ecuaţie integro - diferenţială, care, prin derivarea ambilor membri în raport cu timpul, devine

$$\frac{1}{\sin\chi}\frac{\partial}{\partial\chi}\left(\sin\chi\frac{\partial A^1}{\partial\chi}\right) - \frac{1}{\sin^2\chi}A^1 - \frac{a^2}{4}\frac{\partial^2 A^1}{\partial t^2} = 0 \;; 0 \leq \chi = 2\theta \leq 2\pi \tag{4.13}$$

Cu

$$A^1(\chi, t) = P(\chi)T(t) \tag{4.14}$$

obţinem, din (4.13), ecuaţiile

$$a)\quad \frac{d^2T}{dt^2} + \omega^2 T = 0\,, \quad \text{cu}\ \omega = const.$$

$$b)\quad \frac{1}{\sin\chi}\frac{d}{d\chi}\left[\sin\chi\frac{dP}{d\chi}\right] + \left[\left(\frac{\omega a}{2}\right)^2 - \frac{1}{\sin^2\chi}\right]P = 0 \quad (4.15)$$

şi nu este o problemă să remarcăm că se impune ca

$$\omega_l = \frac{2}{a}\sqrt{l(l+1)}\,;\ l = 1, 2, .. \quad (4.16)$$

pentru ca (4.15.b) să reprezinte ecuaţia diferenţială a funcţiilor Legendre asociate [6]

$$P_l^1(\cos\chi) = \frac{\sin\chi}{2^l l!}\frac{d^{l+1}}{d(\cos\chi)^{l+1}}[(\cos^2\chi - 1)^l] \quad (4.17)$$

Aceasta este o condiţie de cuantificare pentru o valoare dată a razei a, şi dispare în spaţiul plat, unde $a \to \infty$.

Cu (4.16), soluţia lui (4.15.a) este de forma

$$T_l(t) = a_l^1 \exp(-i\omega_l t) + \bar{a}_l^1 \exp(i\omega_l t)\,,\ a_l^1 \in C \quad (4.18)$$

şi astfel, obţinem soluţia generală a ecuaţiei (4.13) de forma

$$A^1(\chi, t) = \sum_{l=1}^{\infty} P_l^1(\cos\chi)\ \left[a_l^1 \exp(-i\omega t) + \bar{a}_l^1 \exp(i\omega t)\right] \quad (4.19)$$

Introducând (4.19) în (4.13), avem

$$\frac{dV}{d\theta} - \frac{2a^2C}{\sin\chi} = \sum_{l=1}^{\infty}\frac{4i}{\omega_l}\left[\frac{1}{\sin\chi}\frac{d}{d\chi}\left(\sin\chi P_l^1\right) + \left(l(l+1) - \frac{1}{\sin^2\chi}\right)P_l^1\right]$$
$$\left[a_l^1 e^{-i\omega_l t} - \bar{a}_l^1 e^{i\omega_l t}\right] \quad (4.20)$$

adică, din cauza lui (4.17), (4.16) şi (4.15.b),

$$\frac{dV}{d\theta} = \frac{a^2C}{\sin\theta\cos\theta}\,, \quad (4.21)$$

cu soluţia generală

$$V(\theta) = V_0 + a^2 C \ln(\tan\theta) \tag{4.22}$$

unde V_0 poate fi recalibrat la $V_0 = 0$ în acord cu $V\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$.

Semnificaţia fizică a constantei C poate fi dată prin impunerea Teoremei lui Gauss

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} E a^2 \sin\theta\cos\theta \, d\alpha d\beta = Q \tag{4.23}$$

unde $\varepsilon_0 = 1$ (şi de asemenea $\mu_0 = 1$, adică unităţi Heaviside). Q este sarcina electrică reală conţinută în domeniul tridimensional, mărginit de suprafaţa închisă, *space - like*, de $\theta = const.$ şi $t = const.$, iar

$$E = (F_{14})_\tau \tag{4.24}$$

este intensitatea câmpului electrostatic, cu simetrie rotaţională, în raport cu tetradul pseudo - ortonormal

$$\begin{aligned}
\vec{e}_1 &= e_1^i \frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial\theta} \; ; \; \omega^1 = \omega^1_i dx^i = a d\theta \\
\vec{e}_2 &= e_2^i \frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{1}{a\cos\theta}\frac{\partial}{\partial\alpha} \; ; \; \omega^2 = \omega^2_i dx^i = a\cos\theta d\alpha \\
\vec{e}_3 &= e_3^i \frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{1}{a\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\beta} \; ; \; \omega^3 = \omega^3_i dx^i = a\sin\theta d\beta \\
\vec{e}_4 &= e_4^i \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \; ; \; \omega^4 = \omega^4_i dx^i = dt
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Astfel,

$$(F_{14})_\tau = e_1^i e_4^k g_{il} g_{km} F^{lm} = e_1^1 e_4^4 g_{11} g_{44} F^{14} \tag{4.26}$$

şi, utilizând (4.8.c) şi (4.12.b), obţinem

$$E = -\frac{aC}{\sin\theta\cos\theta} \tag{4.27}$$

care conduce, din (4.23), la expresia lui C în funcţie de sarcina electrică reală Q şi raza a a sferei S^3 :

$$C = -\frac{Q}{4\pi^2 a^3} \tag{4.28}$$

Intensitatea (4.27) şi potenţialul (4.22) ale câmpului electrostatic, cu simetrie rotaţională, în Universul $S^3 \times R$, capătă expresiile concrete

$$\begin{aligned} a)\quad E &= \frac{Q}{2\pi^2 a^2 \sin(2\theta)} \\ b)\quad V(\theta) &= -\frac{Q}{4\pi^2 a}\ln(\tan\theta) \end{aligned} \tag{4.29}$$

şi reprezintă, din punct de vedere fizic, analogul expresiilor bine-cunoscute pentru un câmp electrostatic, cu simetrie sferică, generat de o sarcină punctuală Q, în spaţiul Minkowski.

Acum, considerând $Q = 0$ şi introducând (4.19) în (4.12.a), obţinem expresia componentei A^4

$$\begin{aligned} A^4(\chi, t) = \sum_{l=1}^{\infty} \Big\{ \frac{2i}{\omega_l} & \left[P_l^1(\cos\chi) - 2\cot\chi P_l^1(\cos\chi) \right] \\ & \left[a_l^1 \exp(-i\omega_l t) - \bar{a}_l^1 \exp(i\omega_l t) \right] \Big\} \end{aligned} \tag{4.30}$$

ce corespunde, împreună cu A^1 dat de (4.19), modurilor longitudinale (netriviale) de vid (deoarece $F^{14} \equiv 0$) ale câmpului electromagnetic, cu simetrie rotaţională, pe topologia $S^3 \times R$.

4.1.3 Modurile transversale rotaţional - simetrice ale câmpului Maxwell

După analiza de mai sus, ajungem, în sfârşit, la obiectivul principal al acestui paragraf şi anume, modurile transversale rotaţional simetrice,

observabile, A^2, A^3, ale câmpului electromagnetic, pe $S^3 \times R$ [1,2].

Utilizând variabila

$$x = \cos(2\theta) \tag{4.31}$$

ecuaţiile de câmp (4.10.b,c) devin respectiv

$$\begin{aligned} a) \quad & (1-x^2)\frac{\partial^2 A^2}{\partial x^2} + (1-3x)\frac{\partial A^2}{\partial x} - \frac{a^2}{4}\frac{\partial^2 A^2}{\partial t^2} - A^2 = 0 \\ b) \quad & (1-x^2)\frac{\partial^2 A^3}{\partial x^2} - (1+3x)\frac{\partial A^3}{\partial x} - \frac{a^2}{4}\frac{\partial^2 A^3}{\partial t^2} - A^3 = 0 \end{aligned} \tag{4.32}$$

şi pot fi scrise într-o expresie unică

$$(1-2z)\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + (1-3z)\frac{\partial A}{\partial z} - \frac{a^2}{4}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - A = 0 \tag{4.33}$$

deoarece, pentru $z = x$

$$A(z,t) = A^2(x,t) \tag{4.34}$$

iar, pentru $z = -x$

$$A(z,t) = A^3(x,t) \tag{4.35}$$

Cu ajutorul substituţiei Fourier

$$A(z,t) = Z(z)T(t)\,, \tag{4.36}$$

ecuaţia (4.33) se descompune în ecuaţiile diferenţiale, liniare, ordinare

$$\begin{aligned} a) \quad & \frac{d^2T}{dt^2} + \omega^2 T = 0\ ;\ \omega = const. \\ b) \quad & (1-z^2)\frac{d^2Z}{dz^2} + (1-3z)\frac{dZ}{dz} + \left[\left(\frac{\omega a}{2}\right)^2 - 1\right] Z = 0 \end{aligned} \tag{4.37}$$

unde (4.37.b) reprezintă o formă particulară a ecuaţiei diferenţiale

$$(1-z^2)\,\frac{d^2Z}{dz^2} + [(b-a) - (b+a+2)z]\,\frac{dZ}{dz} + n(n+b+a+1)Z = 0, \tag{4.38}$$

cu $a,\ b > -1$, $n = 0, 1, 2...$, satisfăcută de polinoamele Jacobi

$$Z(z) = P_n^{(a,b)}(z) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-z)^{-a}(1+z)^{-b}\frac{d^n}{dz^n}\left[(1-z)^{n+a}(1+z)^{n+b}\right] \tag{4.39}$$

Comparând ecuaţiile (3.37.b) şi (3.38), rezultă imediat coeficienţii a şi b ca fiind

$$\begin{aligned} a &= 0 \\ b &= 1 \end{aligned} \tag{4.40}$$

Astfel, ecuaţia (3.37.b) posedă soluţia polinomială (regulată), pe $[-1, 1]$

$$Z(z) = P_n^{(0,1)}(z) \tag{4.41}$$

pentru

$$\omega_n = \frac{2}{a}(n+1)\ ,\ n = 0, 1, 2... \tag{4.42}$$

Introducând, pentru fiecare $n \in N$, valoarea (4.42) a lui ω în (3.37.a), obţinem soluţia

$$T_n(t) = c_n \exp(-i\omega_n t) + \bar{c}_n \exp(i\omega_n t) \tag{4.43}$$

care conduce, împreună cu (4.41) şi (4.36), la soluţia (serială) generală a lui (4.33), şi anume

$$A(z,t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(0,1)}(z)\,[c_n \exp(-i\omega_n t) + \bar{c}_n \exp(i\omega_n t] \tag{4.44}$$

Astfel, utilizând relaţiile (4.34), (4.35), (4.31), şi proprietatea de simetrie a polinoamelor Jacobi

$$P_n^{(a,b)}(-x) = (-1)^n P_n^{(b,a)}(x) \tag{4.45}$$

am obţinut, prin metode analitice, componentele "active"

$$\begin{aligned} a)\quad A^2(\theta,t) &= \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(0,1)}(\cos(2\theta)) \left[a_n^2 e^{-i\omega_n t} + \bar{a}_n^2 e^{-i\omega t}\right] \\ b)\quad A^3(\theta,t) &= \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(1,0)}(\cos(2\theta)) \left[a_n^3 e^{-i\omega_n t} + \bar{a}_n^3 e^{-i\omega t}\right] \end{aligned}, \tag{4.46}$$

cu $\{a_n^2,\ a_n^3\}_{n=0}^{\infty} \in C$, ale 4 - potenţialului A, pentru câmpul electromagnetic, cu simetrie rotaţională, fără surse (extinse spaţial), în Universul $S^3 \times R$.

Componentele esenţiale ale tensorului electromagnetic poate fi obţinut direct din relaţiile (4.8.a,b,d,e), utilizând soluţia (4.46), adică

$$\begin{aligned} F^{12} &= \frac{1}{a^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{d}{d\theta}\left(P_n^{(0,1)}(\cos(2\theta)) - 2\tan\theta P_n^{(0,1)}(\cos(2\theta))\right)\right] \\ &\quad \left[a_n^2 e^{-i\omega_n t} + \bar{a}_n^2 e^{i\omega_n t}\right] \\ F^{13} &= \frac{1}{a^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{d}{d\theta}\left(P_n^{(1,0)}(\cos(2\theta)) + 2\cot\theta P_n^{(1,0)}(\cos(2\theta))\right)\right] \\ &\quad \left[a_n^3 e^{-i\omega_n t} + \bar{a}_n^3 e^{i\omega_n t}\right] \\ F^{24} &= -i\sum_{n=0}^{\infty}\omega_n P_n^{(0,1)}(\cos(2\theta))\left[a_n^2 e^{-i\omega_n t} - \bar{a}_n^2 e^{i\omega_n t}\right] \\ F^{34} &= -i\sum_{n=0}^{\infty}\omega_n P_n^{(1,0)}(\cos(2\theta))\left[a_n^3 e^{-i\omega_n t} - \bar{a}_n^3 e^{i\omega_n t}\right] \end{aligned} \tag{4.47}$$

şi, exploatând relaţia de transformare

$$F_{ab} = \frac{1}{2} e^i_{[a} e^k_{b]} g_{il} g_{km} F^{lm} \ ;\ 1 \le a < b \le 4 \tag{4.48}$$

unde parantezele pătrate reprezintă simpla antisimetrizare (fără factorul 1/2), iar $\{e_a\}_{a=\overline{1,4}}$ este tetradul pseudo - ortonormal (4.25).

Obţinem astfel componentele "tetradice" care sunt în relaţie directă (la fel ca pe spaţiul minkowskian) cu intensitatea câmpului electric E şi cu inducţia, B, a câmpului magnetic

$$
\begin{aligned}
E_2 &= (F_{24})_\tau \\
E_3 &= (F_{34})_\tau \\
B_2 &= (F_{31})_\tau \\
B_3 &= (F_{12})_\tau
\end{aligned}
\tag{4.49}
$$

Astfel, în raport cu triadul orto - normal $\{e_1, e_2, e_3\}$ din (4.25), structura câmpului electromagnetic analizat, cu simetrie rotaţională pe background $S^3 \times R$, este descris complet de componentele

$$
\begin{aligned}
E_2 &= i \sum_{n=0}^{\infty} (a\omega_n) \cos\theta P_n^{(0,1)}(\cos(2\theta)) \left[a_n^2 e^{-i\omega_n t} - \bar{a}_n^2 e^{i\omega_n t}\right] \\
E_3 &= i \sum_{n=0}^{\infty} (a\omega_n) \sin\theta P_n^{(1,0)}(\cos(2\theta)) \left[a_n^3 e^{-i\omega_n t} - \bar{a}_n^3 e^{i\omega_n t}\right] \\
B_2 &= - \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sin\theta \frac{d}{d\theta}\left(P_n^{(1,0)}(\cos(2\theta))\right) + 2\cos\theta P_n^{(1,0)}(\cos(2\theta))\right] \\
&\quad \left[a_n^3 e^{-i\omega_n t} + \bar{a}_n^3 e^{i\omega_n t}\right] \\
B_3 &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\cos\theta \frac{d}{d\theta}\left(P_n^{(0,1)}(\cos(2\theta))\right) - 2\sin\theta P_n^{(0,1)}(\cos(2\theta))\right] \\
&\quad \left[a_n^2 e^{-i\omega_n t} + \bar{a}_n^2 e^{i\omega_n t}\right]
\end{aligned}
\tag{4.50}
$$

ale vectorilor $\vec{E}$ şi $\vec{B}$, modurile posedând spectrul liniar (4.42).

In concluzie, ecuaţiile Maxwell în cazul simetriei rotaţionale a câmpului electromagnetic, în Universul Einstein, pot fi rezolvate, şi prezintă

diferenţe majore faţă de cazul minkowskian. Spectrul modurilor longitudinale şi transversale este diferit, datorită curburii. In particular, modurile de vid longitudinale pot fi tratate simultan cu câmpul electrostatic rotaţional simetric. Evident, condiţiile de cuantificare (4.16) şi (4.42) dispar la trecerea pe spaţiul plat, când $a \to \infty$.

4.2 Radiaţia efectivă a câmpului electromagnetic

O caracteristică incitantă care s-a desprins din analiza făcută în primul paragraf fiind absenţa radiaţiei efective a câmpului, ne propune ca, în cele ce urmează, să ne focalizăm atenţia asupra modurilor radiative, complementare, cu simetrie rotaţională.

Lucrând într-un gauge convenabil, vom elimina modurile longitudinale şi vom reduce condiţia Lorentz de etalonare la un gauge transversal bidimensional. In acest context, integrând ecuaţiile Maxwell, vom obţine componentele esenţiale ale tensorului electromagnetic şi ale vectorului Umov - Poynting, precum şi densitatea de energie. In final, vom alege ca aplicaţie concretă, cazul particular al modurilor excitate *left* - şi *right - moving* corespunzătoare lui ($n = 0; m = m' = 1$) [3].

4.2.1 Etalonul transversal, bidimensional, rotaţional simetric

Utilizând acceaşi parametrizare, (1.177) şi metrică lorentziană (1.179), vom obţine, în cele ce urmează, soluţia de gauge transversal, bidimensional, corespunzătoare modurilor radiative complementare, cu simetrie rotaţională, ale câmpului electromagnetic pe background $S^3 \times R$.

Vom impune etalonul

$$A^1 = A^4 = 0 \tag{4.51}$$

care reduce condiţia de etalonare Lorentz

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^i}(\sqrt{-g}A^i) = 0 \tag{4.52}$$

la aşa numita condiţie de gauge transversal

$$\frac{\partial A^2}{\partial \alpha} + \frac{\partial A^3}{\partial \beta} = 0 \tag{4.53}$$

unde toate componentele 4 - potenţialului A sunt considerate în raport cu baza canonică (4.6). Cea mai simplă "soluţie", netrivială a condiţiei (4.53) este

$$\frac{\partial A^2}{\partial \alpha} = \frac{\partial A^3}{\partial \beta} = 0 \tag{4.54}$$

adică

$$A^2 = A^2(\theta, \beta, t)$$
$$A^3 = A^3(\theta, \alpha, t) \tag{4.55}$$

reprezentând practic simetria rotaţională, complementară, a potenţialului electromagnetic, în Universul static $S^3 \times R$.

In aceste condiţii, componentele contravariante (4.4) ale tensorului electromagnetic, capătă următoarele expresii simplificate,

$$
\begin{aligned}
a)\quad F^{12} &= \frac{1}{a^2}\left[\frac{\partial A^2}{\partial\theta} - 2\tan\theta A^2\right]\\
b)\quad F^{13} &= \frac{1}{a^2}\left[\frac{\partial A^3}{\partial\theta} + 2\cot\theta A^3\right]\\
c)\quad F^{23} &= \frac{1}{a^2}\left[\frac{1}{\cos^2\theta}\frac{\partial A^3}{\partial\alpha} - \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial A^2}{\partial\beta}\right]\\
d)\quad F^{24} &= \frac{\partial A^2}{\partial t}\\
e)\quad F^{34} &= \frac{\partial A^3}{\partial t}
\end{aligned}
\tag{4.56}
$$

aducând ecuaţiile Maxwell (4.9) la forma concretă

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\sin\theta\cos\theta\left[\frac{\partial A^2}{\partial\theta} - 2\tan\theta A^2\right]\right\} +\\
&\qquad + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 A^2}{\partial\beta^2} - a^2\frac{\partial^2 A^2}{\partial t^2} = 0\\
&\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\sin\theta\cos\theta\left[\frac{\partial A^3}{\partial\theta} + 2\cot\theta A^3\right]\right\} +\\
&\qquad + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 A^3}{\partial\beta^2} - a^2\frac{\partial^2 A^3}{\partial t^2} = 0
\end{aligned}
\tag{4.57}
$$

celelalte două ecuaţii, pentru $i = 1$ şi $i = 4$, reducându-se automat la identitatea trivială $0 = 0$.

4.2.2 Soluţia generală şi expresiile componentelor esenţiale ale tensorului electromagnetic

Ca de obicei când lucrăm în coordonate sferice, vom introduce variabila (4.31) şi vom obţine pentru (4.57) expresiile echivalente

$$
\begin{aligned}
&a)\quad (1-x^2)\frac{\partial^2 A^2}{\partial x^2}+(1-3x)\frac{\partial A^2}{\partial x}+\frac{1/2}{1-x}\frac{\partial^2 A^2}{\partial \beta^2}-\frac{a^2}{4}\frac{\partial^2 A^2}{\partial t^2}-A^2=0\\
&b)\quad (1-x^2)\frac{\partial^2 A^3}{\partial x^2}-(1+3x)\frac{\partial A^3}{\partial x}+\frac{1/2}{1-x}\frac{\partial^2 A^2}{\partial \alpha^2}-\frac{a^2}{4}\frac{\partial^2 A^3}{\partial t^2}-A^3=0
\end{aligned}
\tag{4.58}
$$

pe care putem să le scriem comprimat ca

$$(1-z^2)\frac{\partial^2 A}{\partial z^2}+(1-3z)\frac{\partial A}{\partial z}+\frac{1/2}{1-z}\frac{\partial^2 A}{\partial \varphi^2}-\frac{a^2}{4}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}-A^2=0 \tag{4.59}$$

deoarece, pentru $z=x$ şi $\varphi=\beta$, avem

$$A(z,\varphi,t) = A^2(x\beta,t) \tag{4.60}$$

iar, pentru $z=-x$ şi $\varphi=\alpha$ avem

$$A(z,\varphi,t) = A^3(x,\alpha,t) \tag{4.61}$$

Pentru a integra ecuaţia (4.59), vom aplica substituţia Fourier

$$A(z,\varphi,t) = Z(z)\Phi(\varphi)T(t) \tag{4.62}$$

obţinând pentru (4.59) următoarele ecuaţii diferenţiale, liniare, ordinare

$$
\begin{aligned}
&a)\quad \frac{d^2T}{dt^2}+\omega^2 T = 0\\
&b)\quad \frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}+k^2\Phi = 0\\
&c)\quad (1-z^2)\frac{d^2Z}{dz^2}+(1-3z)\frac{dZ}{dz}+\left[\left(\frac{\omega a}{2}\right)^2-1-\frac{\mu^2}{1-z}\right]Z=0
\end{aligned}
\tag{4.63}
$$

unde $\mu = k^2/2$ şi, pentru moment, $\omega, k \in R$.

Datorită faptului că φ este coordonată azimutală, soluţia fundamentală

$$\Phi(\varphi) = \exp(ik\varphi) \tag{4.64}$$

al lui (4.63.b) trebuie să fie 2π - periodică, şi astfel $ik \in Z$. Pentru a integra (4.63.c), observă că $z = 1$ este un punct singular al funcţiei

$$f(z) = \left(\frac{\omega a}{2}\right)^2 - 1 - \frac{\mu}{1-z} \tag{4.65}$$

şi de aceea soluţia $Z(z)$ trebuie căutată de forma

$$Z(z) = (1-z)^\nu U(z)\ ,\ \nu \in R \tag{4.66}$$

Acum, introducând pe (4.66) în (4.63.c), ajungem la ecuaţia

$$(1-z^2)\frac{d^2U}{dz^2} + [(1-2\nu) - (3+2\nu)z]\frac{dU}{dz} +$$
$$+\left[\left(\frac{\omega a}{2}\right)^2 - 1 + \frac{[\nu(\nu-2) - \mu^2] + \nu(\nu+2)z}{1-z}\right]U = 0 \tag{4.67}$$

care ne permite să eliminăm singularitatea $z = 1$ din

$$g(z) = \left(\frac{\omega a}{2}\right)^2 - 1 + \frac{[\nu(\nu-2) - \mu^2] + \nu(\nu+2)z}{1-z} \tag{4.68}$$

prin condiţia

$$2\nu^2 = \mu^2 \Leftrightarrow \nu^2 = (k/2)^2 \tag{4.69}$$

Deoarece pentru $\nu < 0$ soluţia (4.66) diverge în $z = 1$ (cel puţin pentru $U(1) \neq 0$), vom selecta numai

$$\nu = \frac{1}{2}|k| \tag{4.70}$$

şi (4.67) devine

$$(1-z^2)\frac{d^2U}{dz^2}+[(1-|k|)-(3+|k|)z]\frac{dU}{dz}+$$
$$+\left[\left(\frac{\omega a}{2}\right)^2-1-\frac{|k|}{2}\left(\frac{|k|}{2}+2\right)\right]U=0. \tag{4.71}$$

Comparând (4.71) cu ecuaţia (4.38) a polinoamelor Jacobi (4.39), rezultă coeficienţii

$$\begin{aligned} a &= |k| \\ b &= 1 \end{aligned} \tag{4.72}$$

precum şi spectrul

$$\omega_{n|k|}=\frac{2}{a}\left[n+1\frac{|k|}{2}\right] \tag{4.73}$$

al modurilor staţionare

$$\begin{aligned} U_{n|k|}(z) &= P_n^{(|k|,1)}(z) \\ T_{nk}(t) &= a_{nk}\exp(-i\omega_{n|k|}t)+b_{nk}\exp(i\omega_{nk}t)\ ;\ \{a_{nk},b_{nk}\}_{n\in N}^{k\in Z}\in C \end{aligned} \tag{4.74}$$

Din (4.62,64,65) şi (4.74) obţinem forma explicită a soluţiei generale a ecuaţiei (4.59)

$$A(z,\varphi,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left\{(1-z)^{\frac{|k|}{2}}P_n^{(|k|,1)}\left[a_{nk}e^{-i\omega_{nk}t}+b_{nk}e^{i\omega_{nk}t}\right]e^{ik\varphi}\right\} \tag{4.75}$$

care mai poate fi scrisă ca

$$\begin{aligned} A(z,\varphi,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}&\left\{(1-z)^{\frac{|k|}{2}}P_n^{(|k|),1)}\right. \\ &\left[a_{nk}e^{i(k\varphi-\omega_{nk}t)}+b_{n(-k)}e^{-i(k\varphi-\omega_{nk}t)}+\right. \\ &\left.\left.+a_{n(-k)}e^{-i(k\varphi+\omega_{nk}t)}+b_{nk}e^{i(k\varphi+\omega_{nk}t)}\right]\right\}+ \\ &+\sum_{n=0}^{\infty}P_n^{(0,1)}(z)\left[a_{n0}e^{-i\omega_{n0}t}+b_{n0}e^{i\omega_{n0}t}\right] \end{aligned} \tag{4.76}$$

unde ultimul termen din membrul drept exprimă modurile transversale, rotaţional simetrice, deduse în paragraful precedent. Deoarece $A(z, \varphi, t)$ trebuie să fie o funcţie reală, adică

$$A(z, \varphi, t) = \bar{A}(z, \varphi, t) , \tag{4.77}$$

obţinem pentru coeficienţii complexi $\{a_{nk},\ b_{nk}\}_{n\in N}^{k\in Z}$ relaţiile algebrice

$$\begin{aligned} b_{n(-k)} &= \bar{a}_{nk} \\ &k \in N \\ a_{n(-k)} &= \bar{b}_{nk} \end{aligned} \tag{4.78}$$

Astfel, din (4. 60,61,78) şi (4.76), rezultă expresiile complete

$$\begin{aligned} A^2(\theta, \beta, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \{ Z_{nm}^{(-)}(\theta) \, [L_n^m(\beta, t) + R_n^m(\beta, t)] \} + A_{(0)}^2(\theta, t) \\ A^3(\theta, \alpha, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m\prime=1}^{\infty} \{ Z_{nm\prime}^{(+)}(\theta) \, [L_n^{m\prime}(\alpha, t) + R_n^{m\prime}(\alpha, t)] \} + A_{(0)}^3(\theta, t) \end{aligned} \tag{4.79}$$

cu

$$Z_{nm}^{(-)}(\theta) = (\sin\theta)^m P_n^{(m,1)}(\cos(2\theta))$$

$$Z_{nm'}^{(+)}(\theta) = (\cos\theta)^{m'} P_n^{(1,m')}(\cos(2\theta))$$

$$L_n^m(\beta,t) = a_{nm}^2 \exp[i(m\beta - \omega_{nm}t)] + \bar{a}_{nm}^2 \exp[-i(m\beta - \omega_{nm}t)]$$

$$L_n^{m'}(\alpha,t) = a_{nm'}^3 \exp[i(m'\alpha - \omega_{nm'}t)] + \bar{a}_{nm'}^3 \exp[-i(m'\alpha - \omega_{nm'}t)]$$

$$R_n^m(\beta,t) = \bar{b}_{nm}^2 \exp[-i(m\beta + \omega_{nm}t)] + b_{nm}^2 \exp[i(m\beta + \omega_{nm}t)]$$

$$R_n^{m'}(\alpha,t) = \bar{b}_{nm'}^3 \exp[-i(m'\alpha + \omega_{nm'}t)] + b_{nm'}^3 \exp[i(m'\alpha + \omega_{nm'}t)]$$

$$A_{(0)}^2(\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(0,1)}(\cos(2\theta))[c_{n0}^2 \exp(i\omega_{n0}t) + \bar{c}_{n0}^2 \exp(i\omega_{n0}t)]$$

$$A_{(0)}^3(\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(1,0)}(\cos(2\theta))[c_{n0}^3 \exp(i\omega_{n0}t) + \bar{c}_{n0}^3 \exp(i\omega_{n0}t)] \tag{4.80}$$

pentru componentele rotaţional simetrice ale potenţialului electromagnetic, în Universul static $S^3 \times R$.

In ceea ce priveşte componentele esenţiale ale tensorului electromagnetic F, acestea se pot calcula direct din (4.101,102) şi sunt de

forma

$$\begin{aligned}
F^{12} &= \frac{1}{a^2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\{X_{nm}(\theta)[L_n^m(\beta,t)+R_n^m(\beta,t)]\}+F^{12}_{(0)}\\
F^{13} &= \frac{1}{a^2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m\prime=1}^{\infty}\{W_{nm\prime}(\theta)[L_n^{m\prime}(\alpha,t)+R_n^{m\prime}(\alpha,t)]\}+F^{13}_{(0)}\\
F^{23} &= \frac{i}{a^2\cos^2\theta}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m\prime=1}^{\infty}\{m\prime Z^{(+)}_{nm\prime}(\theta)[\tilde{L}_n^{m\prime}(\alpha,t)-\tilde{R}_n^{m\prime}(\alpha,t)]\}-\\
&- \frac{i}{a^2\sin^2\theta}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\{mZ^{(-)}_{nm}(\theta)[\tilde{L}_n^{m}(\beta,t)-\tilde{R}_n^{m}(\beta,t)]\}\\
F^{24} &= -i\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\{\omega_{nm}Z^{(-)}_{nm}(\theta)[\tilde{L}_n^m(\beta,t)+\tilde{R}_n^m(\beta,t)]\}+F^{24}_{(0)}\\
F^{34} &= -i\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m\prime=1}^{\infty}\{\omega_{nm\prime}Z^{(+)}_{nm\prime}(\theta)[\tilde{L}_n^{m\prime}(\alpha,t)+\tilde{R}_n^{m\prime}(\alpha,t)]\}+F^{34}_{(0)}
\end{aligned} \tag{4.81}$$

unde

$$\begin{aligned}
X_{nm}(\theta) &= \frac{d}{d\theta}(Z^{(-)}_{nm}(\theta))-2\tan\theta\cdot Z^{(-)}_{nm}\\
W_{nm\prime}(\theta) &= \frac{d}{d\theta}(Z^{(+)}_{nm\prime}(\theta))+2\cot\theta\cdot Z^{(+)}_{nm\prime}\\
\tilde{L}_n^m(\beta,t) &= a^2_{nm}\exp[i(m\beta-\omega_{nm}t)]-\bar{a}^2_{nm}\exp[-i(m\beta-\omega_{nm}t)]\\
\tilde{L}_n^{m\prime}(\alpha,t) &= a^3_{nm\prime}\exp[i(m\prime\alpha-\omega_{nm\prime}t)]-\bar{a}^3_{nm\prime}\exp[-i(m\prime\alpha-\omega_{nm\prime}t)]\\
\tilde{R}_n^m(\beta,t) &= \bar{b}^2_{nm}\exp[-i(m\beta+\omega_{nm}t)]-b^2_{nm}\exp[i(m\beta+\omega_{nm}t)]\\
\tilde{R}_n^{m\prime}(\alpha,t) &= \bar{b}^3_{nm\prime}\exp[-i(m\prime\alpha+\omega_{nm\prime}t)]-b^3_{nm\prime}\exp[i(m\prime\alpha+\omega_{nm\prime}t)]
\end{aligned} \tag{4.82}$$

iar componentele $F^{12}_{(0)}, F^{13}_{(0)}, F^{24}_{(0)}, F^{34}_{(0)}$, ce corespund chiar câmpului electromagnetic, cu simetrie rotațională, analizat în primul paragraf, sunt

cele din (4.56) generate doar de $A^2_{(0)}(\theta,t), A^3_{(0)}(\theta,t)$

$$\begin{aligned}
F^{12}_{(0)} &= \frac{1}{a^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\left[\frac{d\theta}{d\theta}\left(P_n^{(0,1)}(\cos(2\theta))\right) - 2\tan\theta P_n^{(0,1)}(\cos(2\theta))\right]\right.\\
&\quad \left.\left[c^2_{n0}\exp(-i\omega_{n0}t) + \bar{c}^2_{n0}\exp(i\omega_{n0}t)\right]\right\}\\
F^{13}_{(0)} &= \frac{1}{a^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\left[\frac{d\theta}{d\theta}\left(P_n^{(1,0)}(\cos(2\theta))\right) + 2\cot\theta P_n^{(1,0)}(\cos(2\theta))\right]\right.\\
&\quad \left.\left[c^3_{n0}\exp(-i\omega_{n0}t) + \bar{c}^3_{n0}\exp(i\omega_{n0}t)\right]\right\}\\
F^{24}_{(0)} &= -i\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\omega_{n0}P_n^{(0,1)}(\cos(2\theta))\left[c^2_{n0}\exp(-i\omega_{n0}t) - \bar{c}^2_{n0}\exp(i\omega_{n0}t)\right]\right\}\\
F^{34}_{(0)} &= -i\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\omega_{n0}P_n^{(1,0)}(\cos(2\theta))\left[c^3_{n0}\exp(-i\omega_{n0}t) - \bar{c}^3_{n0}\exp(i\omega_{n0}t)\right]\right\}
\end{aligned} \tag{4.83}$$

Inainte de a trece mai departe, să observăm că, omiţând în (4.79) componentele rotaţional simetrice $A^2_{(0)}, A^3_{(0)}$, soluţiile complementare, cu simetrie rotaţională, $A^2(\theta,\beta,t), A^3(\theta,\alpha,t)$ reprezintă, din punct de vedere fizic, superpoziţia liniară a modurilor *left-moving* şi *right-moving*, de polarizare α şi respectiv β, corespunzătoare frecvenţelor pozitive şi negative. De aceea, în sensul electrodinamicii cuantice, semnificaţia amplitudinilor $\left\{a^A_{nk},\ \bar{a}^A_{nk} \mid A=2 \Rightarrow k=m;\ A=3 \Rightarrow k=m'\right\}_{n,k\in N}$ şi $\left\{\bar{b}^A_{nk},\ b^A_{nk} \mid A=2 \Rightarrow k=m;\ A=3 \Rightarrow k=m'\right\}_{n,k\in N}$ va fi practic una operatorială, adică

a^2_{nm} operator de anihilare pentru fotonii *left - moving*, cu polarizare α, momentul unghiular m şi energia $\frac{2}{a}\left(n+1+\frac{m}{2}\right)$

$\bar{a}^2_{nm}$ operator de creare asociat algebric lui a^2_{nm}

$\bar{b}^2_{nm}$ operator de anihilare pentru fotonii *right - moving*, cu polarizare α, momentul unghiular $-m$ şi energia $\frac{2}{a}\left(n+1+\frac{m}{2}\right)$

b^2_{nm} operator de creare asociat algebric lui $\bar{b}^2_{nm}$

$a^3_{nm'}$ operator de anihilare pentru fotonii *left - moving*, cu polarizare β, momentul unghiular m' şi energia $\frac{2}{a}\left(n+1+\frac{m'}{2}\right)$

$\bar{a}^3_{nm'}$ operator de creare asociat algebric lui $a^3_{nm'}$

$\bar{b}^3_{nm'}$ operator de anihilare pentru fotonii *right - moving*, cu polarizare β, momentul unghiular $-m'$ şi energia $\frac{2}{a}\left(n+1+\frac{m'}{2}\right)$

$b^3_{nm'}$ operator de creare asociat algebric lui $\bar{b}^3_{nm'}$

După această digresiune, să ne întoarcem la aspectele clasice şi să efectuăm transformarea

$$\underline{F}_{ab} = \frac{1}{2} e^{\,i}_{[a} e^{\,k}_{b]} g_{il} g_{km} F^{lm} \ ; \ 1 \leq a < b \leq 4 \tag{4.84}$$

a componentelor esenţiale F^{lm}, date de (4.81), în raport cu reperul natural (4.6), la componentele esenţiale $\underline{F}_{ab}$ ale tensorului electromagnetic, în raport cu baza tetradică pseudo - ortonormală (4.25).

Deoarece în reperul rigid (4.25) componentele $\underline{F}_{ab}$ sunt în "corespondenţă minkowskiană" cu componentele ortonormale E_μ şi B_μ ale intensităţii câmpului electric şi respectiv ale inducţiei magnetice (lucrând în unităţi Heaviside), adică

$$\begin{cases} E_\mu = \underline{F}_{\mu 4} \\ B_\mu = \frac{1}{2}\varepsilon^{\ \rho\sigma}_{\mu} F_{\rho\sigma} \ , \ \varepsilon^{\ \rho\sigma}_{\mu} = \delta^{\rho\lambda}\delta^{\sigma\eta}\varepsilon_{\mu\lambda\eta} \ ; \ \varepsilon_{123} = 1 \end{cases} \tag{4.85}$$

vom obţine expresiile vectorilor $\vec{E}$ şi $\vec{B}$ ca fiind

$$\begin{aligned} E_2 &= -a\cos\theta F^{24} \\ E_3 &= -a\sin\theta F^{34} \\ B_1 &= a^2\sin\theta\cos\theta F^{23} \\ B_2 &= -a^2\sin\theta F^{13} \\ B_3 &= a^2\cos\theta F^{12} \end{aligned} \tag{4.86}$$

ceea ce ne permite estimarea de tip minkowskian

$$\begin{aligned} S_\mu &= \varepsilon_\mu^{\ \alpha\beta} E_\alpha B_\beta \\ w &= \frac{1}{2}\delta^{\alpha\beta}[E_\alpha E_\beta + B_\alpha B_\beta] \end{aligned} \tag{4.87}$$

Concret, componentele $\{S_\mu\}_{\mu=\overline{1,3}}$ ale vectorului Umov - Poynting şi densitatea de energie w, corespunzătoare câmpului electromagnetic cu 4 - potenţialul A, complementar rotaţional simetric, în Universul Einstein, au forma

$$\begin{aligned} S_1 &= -a^3[\cos^2\theta F^{12}F^{24} + \sin^2\theta F^{13}F^{34}] \\ S_2 &= -a^3\sin^2\theta\cos\theta F^{23}F^{34} \\ S_3 &= a^3\sin\theta\cos^2\theta F^{23}F^{24} \\ w &= \frac{a^2}{2}\Big\{\cos^2\theta[a^2(F^{12})^2 + (F^{24})^2] + \\ &\quad + \sin^2\theta[a^2(F^{13})^2 + (F^{34})^2] + a^2\sin^2\theta\cos^2\theta(F^{23})^2\Big\} \end{aligned} \tag{4.88}$$

4.2.3 Radiaţia efectivă a câmpului electromagnetic, cu gauge transversal bidimensional, în Universul $S^3 \times R$

Radiaţia care conduce la prezenţa unor componente nenule ale impulsului câmpului electromagnetic, cu gauge transversal bidimensional, pe background $S^3 \times R$, se numeşte radiaţie efectivă. Din punct de vedere matematic, ea corespunde acelor părţi ale componentelor esenţiale ale vectorului Umov - Poynting, care sunt rotaţional simetrice şi independente de timp.

Pentru a explica semnificaţia acestei definiţii, să investigăm dacă S_1, dat de (4.88.a) şi (4.81.a,b,d,e) împreună cu (4.82), reprezintă radiaţie efectivă, în lungul direcţiei θ.

Deoarece, în (4.88), contribuţiile modurilor α- şi β - polarizate sunt deja decuplate, este suficient să analiză, de exemplu, termenul

$$S_1^{(2)} = -a^3 \cos^2\theta F^{12} F^{24} \tag{4.89}$$

adică

$$\begin{aligned} S_1^{(2)} = i\cos^2\theta \sum_{n_1,n_2=0}^{\infty} \sum_{m_1,m_2=1}^{\infty} \left(n_2+1+\frac{m_2}{2}\right) X_{n_1m_2}(\theta) Z^{(-)}_{n_2m_2}(\theta) \\ \Big[L^{m_1}_{n_1}(\beta,t)\tilde{L}^{m_2}_{n_2}(\beta,t) + L^{m_1}_{n_1}(\beta,t)\tilde{R}^{m_2}_{n_2}(\beta,t) \\ + R^{m_1}_{n_1}(\beta,t)\tilde{L}^{m_2}_{n_2}(\beta,t) + R^{m_1}_{n_1}(\beta,t)\tilde{R}^{m_2}_{n_2}(\beta,t)\Big] \end{aligned} \tag{4.90}$$

unde nu au fost luate în considerare contribuţiile

$$-a^3\cos^2\theta \left\{ \frac{1}{a^2} \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{m_1=1}^{\infty} X_{n_1m_1}(\theta) \left[L^{m_1}_{n_1}(\beta,t) + R^{m_1}_{n_1}(\beta,t)\right] \right\} F^{24}_{(0)}\,, \tag{4.91}$$

$$-a^3\cos^2\theta\left\{-i\sum_{n_2=0}^{\infty}\sum_{m_2=1}^{\infty}\frac{2}{a}(n_2+1+m_2)\right.$$

$$\left.Z^{(-)}_{n_2m_2}(\theta)\left[L^{m_2}_{n_2}(\beta,t)+\tilde{R}^{m_2}_{n_2}(\beta,t)\right]\right\}F^{12}_{(0)}\,, \tag{4.92}$$

$$-a^3\cos^2\theta F^{12}_{(0)}F^{24}_{(0)} \tag{4.93}$$

deoarece nici una dintre ele nu este nici rotaţional simetrică, nici independentă de timp.

Pentru a afla răspunsul este suficient să ne focaliză, din nou, numai pe termenii $L\tilde{L}$ şi $L\tilde{R}$, deoarece situaţia va fi similară şi pentru $R\tilde{R}$ şi $R\tilde{L}$.

Considerând termenul $L\tilde{L}$ din (4.89), avem

$$L^{m_1}_{n_1}(\beta,t)\tilde{L}^{m_2}_{n_2}(\beta,t) = \tag{4.94}$$

$$= \left[a_{n_1m_1}e^{i(m_1\beta-\frac{2}{a}(n_1+1+\frac{m_1}{2})t)}+\bar{a}_{n_1m_1}e^{-i(m_1\beta-\frac{2}{a}(n_1+1+\frac{m_1}{2})t)}\right]$$

$$\left[a_{n_2m_2}e^{i(m_2\beta-\frac{2}{a}(n_2+1+\frac{m_2}{2})t)}-\bar{a}_{n_2m_2}e^{-i(m_2\beta-\frac{2}{a}(n_2+1+\frac{m_2}{2})t)}\right]=$$

$$= a_{n_1m_1}a_{n_2m_2}\exp\left\{i\left[(m_1+m_2)\beta-\frac{2}{a}\left(n_1+n_2+2+\frac{m_1+m_2}{2}\right)t\right]\right\}-$$

$$-a_{n_1m_1}\bar{a}_{n_2m_2}\exp\left\{i\left[(m_1-m_2)\beta-\frac{2}{a}\left(n_1-n_2+\frac{m_1-m_2}{2}\right)t\right]\right\}+$$

$$+\bar{a}_{n_1m_1}a_{n_2m_2}\exp\left\{-i\left[(m_1-m_2)\beta-\frac{2}{a}\left(n_1-n_2+\frac{m_1-m_2}{2}\right)t\right]\right\}-$$

$$-\bar{a}_{n_1m_1}\bar{a}_{n_2m_2}\exp\left\{-i\left[(m_1+m_2)\beta-\frac{2}{a}\left(n_1+n_2+2+\frac{m_1+m_2}{2}\right)t\right]\right\}$$

Cum $n_1, n_2 \geq 0$ şi $m_1, m_2 \geq 1$, este clar că primul şi ultimul termen din (4.94) nu pot fi rotaţional simetrici şi independenţi de timp şi de

aceea, integrarea lor, în raport cu β de la 0 la 2π, şi apoi medierea în raport cu timpul cosmic, vor conduce la un rezultat nul. Cât priveşte termenii al doilea şi al treilea, ei sunt independenţi de β şi t, atunci când $m_1 = m_2$ şi $n_1 = n_2$. Apoi,

$$-|a_{n_1m_1}|^2 + |a_{n_1m_1}|^2 \equiv 0 \tag{4.95}$$

şi astfel, nu există radiaţie efectivă datorată modurilor *left - moving* $L\tilde{L}$. Desigur, acelaşi lucru putem spune şi despre contribuţia $R\tilde{R}$ a modurilor *right - moving*.

In ceea ce priveşte termenul $L\tilde{R}$, avem

$$\begin{aligned} & L_{n_1}^{m_1}(\beta,t)\tilde{R}_{n_2}^{m_2}(\beta,t) = \\ = & \left\{a_{n_1m_1}\exp\left[i\left(m_1\beta - \frac{2}{a}\left(n_1+1+\frac{m_1}{2}\right)t\right)\right] + \right. \\ + & \left.\bar{a}_{n_1m_1}\exp\left[-i\left(m_1\beta - \frac{2}{a}\left(n_1+1+\frac{m_1}{2}\right)t\right)\right]\right\} + \\ & \left\{\bar{b}_{n_2m_2}\exp\left[-i\left(m_2\beta + \frac{2}{a}\left(n_2+1+\frac{m_2}{2}\right)t\right)\right] - \right. \\ - & \left. b_{n_2m_2}\exp\left[i\left(m_2\beta + \frac{2}{a}\left(n_2+1+\frac{m_2}{2}\right)t\right)\right]\right\} \end{aligned} \tag{4.96}$$

şi este simplu să observă că, în (4.96), nu există independenţă simultană de β şi t. Desigur, câmpul electromagnetic cu gauge transversal, bidimensional, în Universul static $S^3 \times R$, nu prezintă radiaţie efectivă pe direcţia lui θ.

Să ne ocupă acum de componenta S_2 a vectorului Umov - Poynting,

care devine

$$\begin{aligned} S_2 &= -a^3 \sin^2\theta \cos\theta \\ &\left\{ \frac{i}{a^2\cos^2\theta} \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{m_1{}'=1}^{\infty} m_1{}' Z^{(+)}_{n_1 m_1{}'}(\theta) \left[\tilde{L}^{m_1{}'}_{n_1}(\alpha,t) - \tilde{R}^{m_1{}'}_{n_1}(\alpha,t) \right] - \right. \\ &- \left. \frac{i}{a^2\cos^2\theta} \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{m_1=1}^{\infty} m_1 Z^{(-)}_{n_1 m_1}(\theta) \left[\tilde{L}^{m_1}_{n_1}(\beta,t) - \tilde{R}^{m_1}_{n_1}(\beta,t) \right] \right\} \\ &\left\{ -i \sum_{n_2=0}^{\infty} \sum_{m_2{}'=1}^{\infty} \frac{2}{a} \left(n_2 + 1 + \frac{m_2{}'}{2} \right) Z^{(+)}_{n_2 m_2{}'}(\theta) \right. \\ &\left. \left[\tilde{L}^{m_2{}'}_{n_2}(\alpha,t) + \tilde{R}^{m_2{}'}_{n_2}(\alpha,t) \right] + F^{34}_{(0)} \right\} \end{aligned} \tag{4.97}$$

Din discuţia de mai sus, observăm că modurile *left - moving* şi *right - moving*, de polarizare α şi respectiv β, şi de asemenea termenul $F^{34}_{(0)}$ nu vor aduce nici o contribuţie la radiaţia efectivă, în direcţia α. Astfel, notând cu $S^{(r)}_r$ partea de radiaţie efectivă a lui S_2, avem

$$\begin{aligned} S^{(r)}_2 &= -2\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} \sum_{n_1,n_2=0}^{\infty} \sum_{m_1{}',m_2{}'=1}^{\infty} m_1{}' \left(n_2 + 1 + \frac{m_2{}'}{2} \right) \\ Z^{(+)}_{n_1 m_1{}'}(\theta) Z^{(+)}_{n_2 m_2{}'}(\theta) &\left[\tilde{L}^{m_1{}'}_{n_1}(\alpha,t) - \tilde{R}^{m_1{}'}_{n_1}(\alpha,t) \right] \left[\tilde{L}^{m_2{}'}_{n_2}(\alpha,t) + \tilde{R}^{m_2{}'}_{n_2}(\alpha,t) \right] \end{aligned} \tag{4.98}$$

ceea ce înseamnă

$$\begin{aligned} S^{(r)}_2 = 4 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} m \left(n + 1 + \frac{m}{2} \right) \sin^2\theta \cos^{2m-1}\theta \\ \left[P^{(1,m)}_n(\cos(2\theta)) \right]^2 \left[|a^3_{nm}|^2 - |b^3_{nm}|^2 \right] \end{aligned} \tag{4.99}$$

deoarece

$$\begin{aligned}\left(\tilde{L}_{n_1}^{m_1\prime}(\alpha,t)\tilde{R}_{n_2}^{m_2\prime}(\alpha,t)\right)^{(r)} &= \left(\tilde{R}_{n_1}^{m_1\prime}(\alpha,t)\tilde{L}_{n_2}^{m_2\prime}(\alpha,t)\right)^{(r)} \equiv 0 \\ \left(\tilde{L}_{n_1}^{m_1\prime}(\alpha,t)\tilde{L}_{n_2}^{m_2\prime}(\alpha,t)\right)^{(r)} &= -2\delta_{n_1n_2}\delta_{m_1\prime m_2\prime}|a^3_{n_1m_1\prime}|^2 \\ \left(\tilde{R}_{n_1}^{m_1\prime}(\alpha,t)\tilde{R}_{n_2}^{m_2\prime}(\alpha,t)\right)^{(r)} &= -2\delta_{n_1n_2}\delta_{m_1\prime m_2\prime}|b^3_{n_1m_1\prime}|^2 \end{aligned} \tag{4.100}$$

Aplicând exact aceeaşi procedură, obţinem expresia completă pentru partea radiativă componentei S_3 şi anume

$$S_3^{(r)} = 4\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} m\left(n+1+\frac{m}{2}\right)\cos^2\theta\sin^{2m-1}\theta \left[P_n^{(m,1)}(\cos(2\theta))\right]^2\left[|a^2_{nm}|^2-|b^2_{nm}|^2\right] \tag{4.101}$$

In final, ca o aplicaţie imediată a ceea ce am prezentat până acum, să analizăm modurile complementare, rotaţional simetrice, $(n=0; m=1)$, $(n=0; m\prime=1)$, corespunzătoare câmpului electromagnetic efectiv, cu gauge transversal bidimensional, în spaţiu - timpul $S^3\times R$, static. Deoarece

$$P_0^{(1,1)}(\cos(2\theta)) \equiv 1\,, \tag{4.102}$$

rezultă din (4.73,79,80)

$$\begin{aligned} A_2(\theta,\beta,t) &= \sin\theta\left\{\left[a^2_{01}e^{i(\beta-\frac{3}{a}t)}+\bar{a}^2_{01}e^{-i(\beta-\frac{3}{a}t)}\right]+\right. \\ &+ \left[\bar{b}^2_{01}e^{-i(\beta+\frac{3}{a}t)}+b^2_{01}e^{i(\beta+\frac{3}{a}t)}\right]+ \\ A_3(\theta,\alpha,t) &= \cos\theta\left\{\left[a^3_{01}e^{i(\alpha-\frac{3}{a}t)}+\bar{a}^3_{01}e^{-i(\alpha-\frac{3}{a}t)}\right]+\right. \\ &+ \left.\left[\bar{b}^3_{01}e^{-i(\alpha+\frac{3}{a}t)}+b^3_{01}e^{i(\alpha+\frac{3}{a}t)}\right]\right\} \end{aligned} \tag{4.103}$$

Cu $n=0$ şi $m=m\prime=1$, funcţiile (4.82.a,b) devin

$$\begin{aligned} X_{01}(\theta) &= -\frac{1-3\cos(2\theta)}{2\cos\theta} \\ W_{01}(\theta) &= \frac{1+3\cos(2\theta)}{2\cos\theta} \end{aligned} \tag{4.104}$$

şi conduc la următoarele expresii ale componentelor esenţiale (în raport cu baza canonică) ale tensorului electromagnetic

$$
\begin{aligned}
F^{12} &= -\frac{1-3\cos(2\theta)}{2a^2\cos\theta}\left\{\left[a_{01}^2 e^{i(\beta-\frac{3}{a}t)} + \bar{a}_{01}^2 e^{-i(\beta-\frac{3}{a}t)}\right] + \right.\\
&\quad \left. + \left[\bar{b}_{01}^2 e^{-i(\beta+\frac{3}{a}t)} + b_{01}^2 e^{i(\beta+\frac{3}{a}t)}\right]\right\}\\
F^{13} &= \frac{1+3\cos(2\theta)}{2a^2\sin\theta}\left\{\left[a_{01}^3 e^{i(\alpha-\frac{3}{a}t)} + \bar{a}_{01}^3 e^{-i(\alpha-\frac{3}{a}t)}\right] + \right.\\
&\quad \left. + \left[\bar{b}_{01}^3 e^{-i(\alpha+\frac{3}{a}t)} + b_{01}^3 e^{i(\alpha+\frac{3}{a}t)}\right]\right\}\\
F^{23} &= \frac{i}{a^2\cos\theta}\left\{\left[a_{01}^3 e^{i(\alpha-\frac{3}{a}t)} - \bar{a}_{01}^3 e^{-i(\alpha-\frac{3}{a}t)}\right] - \right.\\
&\quad \left. - \left[\bar{b}_{01}^3 e^{-i(\alpha+\frac{3}{a}t)} - b_{01}^3 e^{i(\alpha+\frac{3}{a}t)}\right]\right\} -\\
&\quad - \frac{i}{a^2\sin\theta}\left\{\left[a_{01}^2 e^{i(\beta-\frac{3}{a}t)} - \bar{a}_{01}^2 e^{-i(\beta-\frac{3}{a}t)}\right] - \right.\\
&\quad \left. - \left[\bar{b}_{01}^2 e^{-i(\beta+\frac{3}{a}t)} - b_{01}^2 e^{i(\beta+\frac{3}{a}t)}\right]\right\} -\\
F^{24} &= -\frac{3i}{a}\sin\theta\left\{\left[a_{01}^2 e^{i(\beta-\frac{3}{a}t)} - \bar{a}_{01}^2 e^{-i(\beta-\frac{3}{a}t)}\right] + \right.\\
&\quad \left. + \left[\bar{b}_{01}^2 e^{-i(\beta+\frac{3}{a}t)} - b_{01}^2 e^{i(\beta+\frac{3}{a}t)}\right]\right\}\\
F^{34} &= -\frac{3i}{a}\cos\theta\left\{\left[a_{01}^3 e^{i(\alpha-\frac{3}{a}t)} - \bar{a}_{01}^3 e^{-i(\alpha-\frac{3}{a}t)}\right] + \right.\\
&\quad \left. + \left[\bar{b}_{01}^3 e^{-i(\alpha+\frac{3}{a}t)} - b_{01}^3 e^{i(\alpha+\frac{3}{a}t)}\right]\right\} \qquad (4.105)
\end{aligned}
$$

Introducând (4.105) în (4.86), rezultă

$$
\begin{aligned}
E_2 &= i\frac{3}{2}\sin(2\theta)\left\{\left[a_{01}^2 e^{i(\beta-\frac{3}{2}t)} - \bar{a}_{01}^2 e^{-i(\beta-\frac{3}{a}t)}\right]+\right.\\
&\quad\left.+\left[\bar{b}_{01}^2 e^{-i(\beta+\frac{3}{2}t)} - b_{01}^2 e^{i(\beta+\frac{3}{a}t)}\right]\right\}\\
E_3 &= i\frac{3}{2}\sin(2\theta)\left\{\left[a_{01}^3 e^{i(\alpha-\frac{3}{2}t)} - \bar{a}_{01}^3 e^{-i(\alpha-\frac{3}{a}t)}\right]+\right.\\
&\quad\left.+\left[\bar{b}_{01}^3 e^{-i(\alpha+\frac{3}{2}t)} - b_{01}^3 e^{i(\alpha+\frac{3}{a}t)}\right]\right\}\\
B_1 &= i\sin(\theta)\left\{\left[a_{01}^3 e^{i(\alpha-\frac{3}{2}t)} - \bar{a}_{01}^3 e^{-i(\alpha-\frac{3}{a}t)}\right]-\right.\\
&\quad\left.-\left[\bar{b}_{01}^3 e^{-i(\alpha+\frac{3}{2}t)} - b_{01}^3 e^{i(\alpha+\frac{3}{a}t)}\right]\right\}-\\
&- i\cos(\theta)\left\{\left[a_{01}^2 e^{i(\beta-\frac{3}{2}t)} - \bar{a}_{01}^2 e^{-i(\beta-\frac{3}{a}t)}\right]-\right.\\
&\quad\left.-\left[\bar{b}_{01}^2 e^{-i(\beta+\frac{3}{2}t)} - b_{01}^2 e^{i(\beta+\frac{3}{a}t)}\right]\right\}\\
B_2 &= -\frac{1}{2}(1+3\cos(2\theta))\left\{\left[a_{01}^3 e^{i(\alpha-\frac{3}{2}t)} + \bar{a}_{01}^3 e^{-i(\alpha-\frac{3}{a}t)}\right]+\right.\\
&\quad\left.+\left[\bar{b}_{01}^3 e^{-i(\alpha+\frac{3}{2}t)} + b_{01}^3 e^{i(\alpha+\frac{3}{a}t)}\right]\right\}\\
B_3 &= -\frac{1}{2}(1-3\cos(2\theta))\left\{\left[a_{01}^2 e^{i(\beta-\frac{3}{2}t)} + \bar{a}_{01}^2 e^{-i(\beta-\frac{3}{a}t)}\right]+\right.\\
&\quad\left.+\left[\bar{b}_{01}^2 e^{-i(\beta+\frac{3}{2}t)} + b_{01}^2 e^{i(\beta+\frac{3}{a}t)}\right]\right\}
\end{aligned}
\tag{4.106}
$$

obţinem din (4.99) şi (4.101), componentele esenţiale ale vectorului Umov - Poynting implicat în radiaţia efectivă a modurilor ($n=0$, $m=m\prime=1$) α - şi β - polarizate

$$
\begin{aligned}
S_2^{(r)} &= 6\sin^2\theta\cos\theta\left[|a_{01}^3|^2 - |b_{01}^3|^2\right]\\
S_3^{(r)} &= 6\sin\theta\cos^2\theta\left[|a_{01}^2|^2 - |b_{01}^2|^2\right]
\end{aligned}
\tag{4.107}
$$

Utilizând (4.107), este foarte simplu să calculăm impulsul efectiv

$$
P_\mu = \int_{(S^3)} S_\mu^{(r)}\sqrt{-g}\,d^3x \tag{4.108}
$$

corespunzător câmpului electromagnetic, cu gauge transversal bidimensional, ($n=0$, $m=m\prime=1$, α şi β) pe background $S^3\times R$ static. Acesta

este

$$
\begin{aligned}
P_2 &= 24\pi^2 a^3 \left[\int_0^{\pi/2} \sin^3\theta \cos^2\theta d\theta\right] \left[|a_{01}^3|^2 - |b_{01}^3|^2\right] \\
P_3 &= 24\pi^2 a^3 \left[\int_0^{\pi/2} \sin^2\theta \cos^3\theta d\theta\right] \left[|a_{01}^2|^2 - |b_{01}^2|^2\right]
\end{aligned}
\tag{4.109}
$$

adică

$$
\begin{aligned}
P_2 &= \frac{48\pi^2}{15} a^3 \left[|a_{01}^3|^2 - |b_{01}^3|^2\right] \\
P_3 &= \frac{48\pi^2}{15} a^3 \left[|a_{01}^2|^2 - |b_{01}^2|^2\right]
\end{aligned}
\tag{4.110}
$$

unde, desigur, componentele P_2, P_3 ale impulsului efectiv $\vec{P}$ sunt considerate în raport cu baza pseudo - ortonormală (4.25).

In sfârşit, putem calcula valoarea medie în timp, notată prin $H^{(r)}$, a energiei totale

$$
H = \int_{(S^3)} w\sqrt{-g}d^3x \tag{4.111}
$$

a modurilor complementare, cu simetrie rotaţională, (4.102). In acord cu metoda aplicată la studiul radiaţiei efective, vom obţine, din (4.106),

$$
\begin{aligned}
\left[(E_2)^2\right]^{(r)} &= \frac{9}{2}\sin^2(2\theta)\left[|a_{01}^2|^2 + |b_{01}^2|^2\right] \\
\left[(E_3)^2\right]^{(r)} &= \frac{9}{2}\sin^2(2\theta)\left[|a_{01}^3|^2 + |b_{01}^3|^2\right] \\
\left[(B_1)^2\right]^{(r)} &= 2\cos^2(\theta)\left[|a_{01}^2|^2 + |b_{01}^2|^2\right] + 2\sin^2(\theta)\left[|a_{01}^3|^2 + |b_{01}^3|^2\right] \\
\left[(B_2)^2\right]^{(r)} &= \frac{[1+3\cos(2\theta)]^2}{2}\left[|a_{01}^3|^2 + |b_{01}^3|^2\right] \\
\left[(B_3)^2\right]^{(r)} &= \frac{[1-3\cos(2\theta)]^2}{2}\left[|a_{01}^2|^2 + |b_{01}^2|^2\right]
\end{aligned}
\tag{4.112}
$$

este

$$P_2 = 24\pi^2 a^3 \left[\int_0^{\pi/2} \sin^3\theta \cos^2\theta d\theta\right] \left[|a_{01}^3|^2 - |b_{01}^3|^2\right]$$
$$P_3 = 24\pi^2 a^3 \left[\int_0^{\pi/2} \sin^2\theta \cos^3\theta d\theta\right] \left[|a_{01}^2|^2 - |b_{01}^2|^2\right] \quad (4.109)$$

adică

$$P_2 = \frac{48\pi^2}{15} a^3 \left[|a_{01}^3|^2 - |b_{01}^3|^2\right]$$
$$P_3 = \frac{48\pi^2}{15} a^3 \left[|a_{01}^2|^2 - |b_{01}^2|^2\right] \quad (4.110)$$

unde, desigur, componentele P_2, P_3 ale impulsului efectiv $\vec{P}$ sunt considerate în raport cu baza pseudo - ortonormală (4.25).

In sfârşit, putem calcula valoarea medie în timp, notată prin $H^{(r)}$, a energiei totale

$$H = \int_{(S^3)} w\sqrt{-g}d^3x \quad (4.111)$$

a modurilor complementare, cu simetrie rotaţională, (4.102). In acord cu metoda aplicată la studiul radiaţiei efective, vom obţine, din (4.106),

$$\left[(E_2)^2\right]^{(r)} = \frac{9}{2}\sin^2(2\theta)\left[|a_{01}^2|^2 + |b_{01}^2|^2\right]$$
$$\left[(E_3)^2\right]^{(r)} = \frac{9}{2}\sin^2(2\theta)\left[|a_{01}^3|^2 + |b_{01}^3|^2\right]$$
$$\left[(B_1)^2\right]^{(r)} = 2\cos^2(\theta)\left[|a_{01}^2|^2 + |b_{01}^2|^2\right] + 2\sin^2(\theta)\left[|a_{01}^3|^2 + |b_{01}^3|^2\right]$$
$$\left[(B_2)^2\right]^{(r)} = \frac{[1+3\cos(2\theta)]^2}{2}\left[|a_{01}^3|^2 + |b_{01}^3|^2\right]$$
$$\left[(B_3)^2\right]^{(r)} = \frac{[1-3\cos(2\theta)]^2}{2}\left[|a_{01}^2|^2 + |b_{01}^2|^2\right] \quad (4.112)$$

Densitatea efectivă de energie, (4.87.b), capătă forma concretă

$$w^{(r)} = [3-\cos(2\theta)]\left[|a_{01}^2|^2 + |b_{01}^2|^2\right] + [3+\cos(2\theta)]\left[|a_{01}^3|^2 + |b_{01}^3|^2\right] \tag{4.113}$$

iar din definiţia

$$H^{(r)} = \pi^2 a^3 \int_{-1}^{1} w^{(r)}(x)dx \; ; \; (\text{cu } x = \cos(2\theta)) \tag{4.114}$$

obţinem expresia completă a valorii medii în timp, a energiei câmpului electromagnetic, cu modurile ($n = 0, m\prime = m = 1$, α şi β) - polarizate, în Universul Einstein

$$H^{(r)} = 6\pi^2 a^3 \left\{\left[|a_{01}^2|^2 + |b_{01}^2|^2\right] + \left[|a_{01}^3|^2 + |b_{01}^3|^2\right]\right\}. \tag{4.115}$$

4.3 Ecuaţiile câmpului electromagnetic pe $S^3 \times R$ în formulare canonică

In încheierea acestui capitolul, dedicat studiului câmpului electromagnetic, în Universul Einstein, să scriem ecuaţiile electrodinamicii într-un fibrat principal, cu varietatea de bază $\mathcal{M} = S^3 \times R$ şi grupul structural abelian $U(1)$ [8]. Rezultatele obţinute vor fi generalizate în capitolul următor, constituit ca o tentativă de geometrizare a principalelor surse materiale şi a interacţiunilor dintre acestea, în cadrul unei teorii gauge $SU(2) \times U(1)$, pe $S^3 \times R$.

Vom păstra aceeaşi parametrizare, (1.177), pentru sfera S^3, de rază unitate. Lucrând în baza rigidă (1.186), componentele 1-formei de

conexiune sunt (1.93) care, înlocuite în expresia generală a derivatei covariante a unui vector

$$\nabla_i V_j = e_i V_j - \Gamma^k_{\ ji} V_k \tag{4.116}$$

ne conduc la

$$\nabla_i V_j = e_i V_j + \varepsilon_{4jik} V^k \tag{4.117}$$

Ţinând cont de expresiile (1.187), ale constantelor de structură C^k_{ij}, tensorul de curbură (Riemann), (1.63), devine

$$\begin{aligned} R^m_{\ jik} &= e_i \Gamma^m_{\ jk} - e_k \Gamma^m_{\ ji} + \Gamma^r_{\ jk} \Gamma^m_{\ ri} - \Gamma^r_{\ ji} \Gamma^m_{\ rk} - \Gamma^m_{\ jr} C^r_{\ ik} = \\ &= \delta_{m4}\delta_{ji}\delta_{4k} + \delta_{mk}\delta_{j4}\delta_{4i} - \delta_{mi}\delta_{4k}\delta_{j4} - \delta_{m4}\delta_{4i}\delta_{jk} + \delta_{mi}\delta_{jk} - \delta_{mk}\delta_{ji} \end{aligned} \tag{4.118}$$

iar tensorul Ricci este

$$R_{ij} = 2\left(\delta_{ij} - \delta_{i4}\delta_{4j}\right) \tag{4.119}$$

Ca şi în cazul câmpurilor Yang - Mills, studiate în paragraful (3.4) dedicat formulării unei teorii gauge $SO(3,1) \times SU(N)$ a câmpului Rarita - Schwinger, vor apare termeni suplimentari (faţă de expresiile de tip minkowskian), atât în tensorul câmpului electromagnetic

$$\begin{aligned} F_{ij} &= e_i A_j - e_j A_i - 2\varepsilon_{4ijk} A^k = \\ &= \tilde{F}_{ij} - 2\varepsilon_{4ijk} A^k \end{aligned} \tag{4.120}$$

cât şi în expresia densităţii de lagrangeian [5]

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{em} &= \frac{1}{4}F_{ij}F^{ij} = \\ &= \frac{1}{4}(e_iA_j - e_jA_i)(e^iA^j - e^jA^i) - \\ &\quad -\varepsilon_{4ijk}A^k(e^iA^j - e^jA^i) + 2(A_kA^k - A_4A^4) = \\ &= \tilde{\mathcal{L}}_{em} - \varepsilon_{4ijk}A^k(e^iA^j - e^jA^i) + 2(A_kA^k - A_4A^4)\end{aligned} \tag{4.121, 4.122}$$

Utilizând pentru densitatea de lagrangeian expresia covariantă

$$\mathcal{L}_{em} = \frac{1}{4}(\nabla_iA_j - \nabla_jA_i)\left(\nabla^iA^j - \nabla^jA^i\right) \tag{4.123}$$

vom obţine, din ecuaţiile Euler - Lagrange

$$\nabla_j\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\nabla_jA_i}\right) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_i}, \tag{4.124}$$

ecuaţiile Maxwell, fără surse, pe spaţiu - timpul $S^3 \times R$

$$\nabla_iF^{ij} = 0 \tag{4.125}$$

sau

$$e_jF^{ij} = \varepsilon_{4\ jk}^{\ i}F^{jk} \tag{4.126}$$

Pentru a face o comparaţie între (4.125) şi ecuaţiile Maxwell pe spaţiul Minkowski, să introducem câmpul electric şi câmpul magnetic, prin relaţiile uzuale

$$F^{\mu4} = -F_{\mu4} = -E_\mu\ ,\ \mu = 1, 2, 3 \tag{4.127}$$

şi

$$F^{\mu\nu} = F_{\mu\nu} = \varepsilon_{\mu\nu\eta}B^\eta \tag{4.128}$$

care, ţinând cont de (4.120), devin

$$E_\mu = e_\mu A_4 - e_4 A_\mu \tag{4.129}$$

şi respectiv

$$B^\nu = \varepsilon^{\nu\alpha\beta} e_\alpha A_\beta - 2A^\nu \tag{4.130}$$

membrul drept al expresiei (4.129) definind rotorul câmpului vectorial $\vec{A}$, pe background $S^3 \times R$.

Revenind la ecuaţiile de câmp (4.125), să considerăm $\underline{i = \alpha}$ şi avem

$$e_\beta F^{\alpha\beta} + e_4 F^{\alpha 4} = 2B^\alpha \tag{4.131}$$

de unde, utilizând (4.126,127) şi expresia rotorului (4.129), obţinem forma obişnuită, de tip minkowskian,

$$\varepsilon^{\alpha\beta\eta} e_\beta B_\eta - 2B^\alpha = \partial_4 E^\alpha \tag{4.132}$$

sau

$$(\nabla \times \vec{B})^\alpha = \partial_t E^\alpha \tag{4.133}$$

De asemenea, pentru $\underline{i = 4}$, rezultă

$$e_\alpha F^{4\alpha} = 0 \tag{4.134}$$

adică

$$e_\alpha E^\alpha = 0 \tag{4.135}$$

In sfârşit, să facem următoarea observaţie. Rezultatele (4.125), (4.132) şi (4.134) sunt un caz particular al relaţiilor generale

$$\begin{aligned} e_j F^{ij} &= \frac{1}{2} g^{jk} \left(e_l g_{jk} + e_j g_{kl} - e_k g_{jl} \right) F^{li} + \varepsilon_{4\ jk}^{\ i} F^{jk} = \\ &= \tilde{\Gamma}^j_{jk} F^{ki} + \varepsilon_{4\ jk}^{\ i} F^{jk} \end{aligned} \tag{4.136}$$

$$(\nabla \times \vec{B})^{\alpha} = \partial_t E^{\alpha} + \tilde{\Gamma}^{j}_{jk} F^{k\alpha} \tag{4.137}$$

şi respectiv

$$e_{\alpha} E^{\alpha} = -\tilde{\Gamma}^{j}_{j\alpha} E^{\alpha} \tag{4.138}$$

unde g_{ij} şi $\tilde{\Gamma}^{k}_{ij}$ sunt, respectiv, tensorul metric fundamental şi simbolurile Christoffel de conexiune, definite în raport cu o bază canonică (de coordonate).

Bibliografie

[1] Dariescu, C., and Dariescu, M.A., 1997, *Rom. J. Phys.* **42**, (*sub tipar*).

[2] Dariescu, M.A., Dariescu, C., and Gottlieb, I., 1995, *Proc. GR14 Int. Conf. on General Relativity and Gravitation*, **A.99**, Florence.

[3] Dariescu, C., Dariescu, M.A., and Gottlieb, I., 1995, *Proc. GR14 Int. Conf. on General Relativity and Gravitation*, **A.100**, Florence.

[4] Zet, G., Dariescu, C., and Dariescu, M.A., 1993, *TENSOR N.S.* **52**, 14.

[5] Dariescu, M.A., and Dariescu, C., 1995, *Astron. Phys. J.* **5**, 61.

[6] Rîjic, I.M., and Gradştein, I.S., 1955, *Tabele de integrale, sume, serii şi produse*, Bucureşti: Ed. Tehnică.

[7] Sen, D., 1986, *J. Math. Phys.* **27**, 472.

[8] Dariescu, C., and Dariescu, M.A., 1991, *Found. Phys.* **21**, 1323.

Cuprins

5 EXTENSIUNEA GEOMETRODINAMICA $S^3 \times R$ A MODELULUI WEINBERG - SALAM **161**

5.1 Introducere 161

5.2 Modelul Weinberg - Salam în spaţiu - timpul Minkowski 170

5.2.1 Lagrangeianul teoriei 171

5.2.2 Mecanismul Higgs 176

5.2.3 Fermionii în modelul Weinberg - Salam 185

5.3 Interacţiuni electroslabe în formulare tetradică Lorentz - gauge invariantă 187

5.4 Teorii gauge $SU(2) \times U(1)$ în Universul Einstein 190

Capitolul 5

EXTENSIUNEA GEOMETRODINAMICA $S^3 \times R$ A MODELULUI WEINBERG - SALAM

5.1 Introducere

Din timpuri imemoriabile, omul a dorit să înţeleagă forţele fundamentale din natură. De asemenea, el a încercat să explice complexitatea naturii cu ajutorul a cât mai puţine concepte elementare posibile. Teoriile gauge tratează aceste două probleme în mod unitar: particulele elementare (descrise prin câmpuri cuantice relativiste) sunt reprezentările unor operatori, corespunzând masei gravitaţionale, spinului, culorii, aromei, sarcinii electrice etc., iar forţele exprimă interacţiunile dintre aceste *sarcini*. Obiectivul principal este acela de a unifica aceste sarcini (şi deci forţe) într-o singură entitate, ale cărei diferite componente să

se poate transforma din una în alta.

Decernarea premiului Nobel pentru fizică, în 1979, pentru elaborarea unei teorii gauge de unificare a interacţiunilor slabe cu cele electromagnetice, a coincis cu împlinirea a aproape 100 de ani de la moartea lui J.C. Maxwell, cel care a realizat prima teorie de unificare a forţelor (electrice şi magnetice) şi căruia, prin completarea adusă de H. Weyl în cadrul primei teorii de geometrizare a câmpului electromagnetic [1], i se atribuie originea teoriilor gauge. Tot în 1979, s-au aniversat 100 de ani de la naşterea lui A. Einstein, cel care a gândit, într-o viziune nouă, ideea unificării tuturor forţelor din natură. Cu acest prilej, A. Salam face un scurt istoric al dezvoltării teoriilor gauge (minkowskiene), menţionând confirmarea experimentală a acestora, prin descoperirea, la CERN, în 1973, a curenţilor neutri.

Interesul pentru teoriile gauge, ca principal candidat pentru o teorie de unificare a tuturor interacţiunilor, *A Theory of Everything*, s-a manifestat după publicarea, în 1954, a lucrării lui Yang şi Mills, [2], care leagă ideea lui Maxwell de simetria internă $SU(2)$.

In 1956, T.D. Lee şi C.N. Yang, [3], au semnalat violarea parităţii în interacţiunile nucleare slabe. Incercarea de explicare a acestei violări, în procese în care intervine particula neutrino, a condus la ideea simetriilor chirale şi la stabilirea unei legături cu masa nulă a particulei neutrino [4].

Astfel la sfârşitul deceniului şase, erau conturate următoarele idei:

1. simetria chirală conduce la o teorie în care curentul este $J = V - A$ (unde V este partea vectorială, iar A este cea axială) ,

2. interacţiunile slabe sunt mediate de particule intermediare grele,

de spin unu, descrise de teorii gauge neabeliene ,

3. generarea maselor pentru aceste particule, precum şi pentru electroni şi particula μ, se face prin mecanismul ruperii spontate a simetriei locale. care, aşa cum va demonstra 't Hooft, mai târziu (1971), nu strică renormabilitatea acestor teorii [5].

Perioada 1961 - 1967 a fost decisivă pentru elaborarea unui model de unificare a interacţiunilor slabe cu cele electromagnetice. Erau deci necesare două tipuri de curenţi, care să se cupleze la câmpurile gauge corespunzătoare $(W^{\pm}, Z^0, \gamma)$. In 1967 (S. Weinberg [6]) şi 1968 (A. Salam [7]) este publicată teoria interacţiunilor electroslabe, având ca grup intern pe $SU(2) \times U(1)$, cu generarea maselor pentru electroni şi bozoni vectoriali intermediari prin mecanism Higgs. Se realizase astfel, o teorie gauge de unificare a interacţiunilor slabe cu cele electromagnetice, renormabilă şi a cărei confirmare experimentală ulterioară, o va situa printre marile teorii ale secolului nostru.

In paralel cu aceasta, s-a dezvoltat o teorie gauge $SU(3)_c$ a interacţiunilor tari (cromodinamica cuantică), cu descoperirea indirectă a celor opt bozoni gauge asociaţi, gluonii [8]. In 1970, introducerea celui de al patrulea cuarc, denumit *charm*, soluţionează dilema absenţei curenţilor ce violează stranietatea iar, începând din 1977, (descoperirea rezonanţei upsilon) fizica celui de al cincilea cuarc, *bottom*, a jucat un rol important în înţelegerea Modelului Standard, cu trei generaţii de leptoni şi cuarci, bazat pe grupul de etalonare $SU(3)_c \times SU(2) \times U(1)$.

Dar, una dintre cele mai importante consecinţe ale fizicii mezonilor B, conţinând cuarcul *bottom*, o constituie dezlegarea misterului violării parităţii combinate CP, observat, nu numai în dezintegrările mezonilor

K neutri [9], ci şi la mezonii B [10,11]. O înţelegere a acestei violări ar explica evoluţia Universului, după Big Bang, într-o lume dominată de materie şi nu într-una în care materia şi antimateria ar fi prezente în mod egal. Toate aceste rezultate, inclusiv cele legate de fizica cuarcului *top*, coroborează într-o veritabilă forţă motrice a Modelului Standard, permiţându-i să reziste testelor experimentale din ultima decadă.

Deoarece atât modelul Weinberg - Salam, cât şi Modelul Standard, au la bază o unificare *trivială*, fundamentată pe produsul direct al grupurilor de etalonare $SU(2) \times U(1)$ şi respectiv $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$, următorul pas a fost construirea unei teorii gauge cu un grup de etalonare unic, cu o singură constantă de cuplaj, masele particulelor fiind generate printr-un mecanism adecvat de rupere spontană de simetrie [12,13,14].

După această succintă prezentare a unui model de unificare a trei tipuri de interacţiuni fundamentale din natură, să ne oprim asupra posibilităţii includerii gravitaţiei în cadrul acestor teorii, ca un omagiu adus marelui A. Einstein ai cărui ultimii 35 de ani din viaţă au fost dedicaţi rezolvării următoarelor două probleme:

1. unificarea gravitaţiei cu materia ,
2. explicarea naturii sarcinii electrice în termeni de geometrie a spaţiu - timpului, în acelaşi mod în care reuşise să explice natura sarcinii gravitaţionale, în termeni de curbură spaţio - temporală.

Se naşte întrebarea : *pot fi extinse teoriile gauge de unificare a interacţiunilor tari şi electroslabe astfel încât să fie inclusă şi gravitaţia?.*

O încercare în acest sens o constituie reactualizarea teoriilor de câmp Kaluza - Klein (1920) de unificare a electromagnetismului cu

gravitaţia în cinci dimensiuni spaţio - temporale. Câmpul Maxwell este asociat componentelor suplimentare ale curburii, introduse de a cincea dimensiune. Generalizarea acestor teorii se face prin considerarea simetriilor interne ca simetrii spaţio-temporale ale dimensiunilor neobservabile. Introducerea dimensiunilor suplimentare necesită o compactificare spontană a lor, pentru a se obţine spectrul particulelor din teoriile Kaluza - Klein.

Evident, în spiritul celor prezentate mai sus, prima tentativă de unificare a celor patru interacţiuni fundamentale ar fi cu ajutorul unui grup gauge unic. Din păcate, teorema Coleman - Mandula interzice amestecul simetriilor interne cu cele spaţio - temporale [15]. Această teoremă a putut fi ocolită prin elaborarea supersimetriei, care grupează, în cadrul aceluiaşi multiplet, atât bozoni cât şi fermioni şi oferă răspuns la aşa numita *problemă ierarhică* din cadrul teoriilor GUT (*Grand Unified Theories*). Astfel, problema diagramelor cu o buclă închisă, care introduc divergenţe în teorie, se rezolvă prin anihilarea între diagramele fermionice (cu semnul minus) şi cele bozonice (cu semnul plus). Supersimetria este privită acum ca o posibilă simetrie fundamentală, nouă, a naturii [16,17].

Mai departe, supergravitaţia unifică câmpurile spinoriale cu gravitaţia şi cu alte câmpuri gauge, pe un superspaţiu conţinând dimensiuni fermionice suplimentare. Astfel, supergravitaţia simplă este teoria gauge a supersimetriei, particulele gauge fiind gravitonul şi partenerul său supersimetric, gravitino. Supergravitaţiile extinse (cu simetrie $SO(8)$) au acelaşi lagrangeian, în patru dimensiuni spaţio - temporale, ca şi supergravitaţia simplă în 11 dimensiuni, dintre care 7 compactificate [18,19].

Teoria cuantică a stringurilor [20] constituie, astăzi, principalul candidat pentru realizarea unei teorii de unificare a tuturor interacţiunilor, deoarece permite existenţa stărilor de spin unu şi 2, corespunzătoare mezonilor vectoriali şi respectiv gravitonilor şi soluţionează o serie de probleme, cum ar fi cea a numărului mare de parametri (aproximativ 19) introduşi, în mod arbitrar, în Modelul Standard.

In ultimii ani, dezvoltarea spectaculoasă a teoriilor gauge prin lărgirea grupului de simetrie internă, extinderea algebrelor Lie la algebre Lie graduate, includerea gravitaţiei, creşterea numărului de dimensiuni etc., a condus la elaborarea unor teorii elegante care să unifice cele patru interacţiuni fundamentale. Deşi există convingerea că natura detestă simetriile globale, supunându-se *principiului gauge*, totuşi nici una dintre teoriile menţionate mai sus nu poate oferi o descriere perfectă a sa, direcţiile prezentate rămânând deschise cercetărilor viitoare.

Iată câteva dintre aceste deficienţe, a căror soluţionare a condus la perfecţionarea continuă a teoriilor existente şi la necesitatea elaborării altora, noi, în efortul continuu de înţlegere şi modelare a naturii, în toată diversitatea ei.

Deşi Modelul Standard este capabil să descrie cu succes un volum enorm de date experimentale, înscriindu-se alături de electrodinamica cuantică, drept una dintre teoriile fundamentale ale acesui sfârşit de secol, totuşi el este departe de a fi perfect, lăsând neelucidate un număr mare de probleme, printre care amintim: natura sarcinii electrice şi sarcinile fracţionare ale cuarcilor, ierarhizarea după mase a celor trei generaţii de cuarci şi leptoni, elementele matricii de amestec a cuarcilor, numărul mare de constante introduse *by hand*, unele dintre acestea fiind legate de sectorul Higgs şi de mecanismul ruperii spontane de simetrie.

Teoriile GUT, cu o singură constantă de cuplaj şi un singur grup G ce include pe $SU(3)$, $SU(2)$ şi $U(1)$, oferă răspunsuri la problemele referitoare la cuantificarea sarcinii electrice, unghiul Weinberg, relaţia dintre masele cuarcilor şi leptonilor, mase diferite pentru neutrini, violarea numărului barionic. Din păcate, ele includ un număr prea mare de bozoni gauge suplimentari şi ignoră complet gravitaţia. Ideea considerării supersimetriei ca o nouă simetrie a naturii, cu versiunea supersimetrică a gravitaţiei, supergravitaţia, oferă marea posibilitatea de unificare a celor patru interacţiuni. Credibilitatea acestor teorii depinde, însă, în mod crucial, de descoperirea superpartenerilor, care, din păcate, se lasă aşteptată.

Deoarece supergravitaţia $N = 1$ ridică multe semne de întrebare legate de imposibilitatea echivalenţei locale sau nerezolvarea problemei divergenţelor, s-a trecut la supergravitaţii extinse, $1 < N \leq 8$. Cel mai simplu exemplul, $N = 2$, unifică teoria lui Maxwell cu gravitaţia, eliminând divergenţele. Pentru supergravitaţiile extinse, $N > 1$, nu există metode generale de studiu, fiecare variantă prezentând, pe lângă avantaje, propriile deficienţe. De exemplu, pentru $N = 8$, simetria $SU(8)$ cere un număr de 63 de câmpuri gauge. Rămân să fie deci eliminate, cele 35 de câmpuri suplimentare.

Se pare că teoria stringurilor, de la naşterea căreia se vor împlini, în curând, 30 de ani, este cea mai aproape de realizarea unificării celor patru tipuri de interacţiuni fundamentale. Totuşi, stringurile bozonice, care oferă posibilitatea unificării gravitaţiei cu teoriile Yang - Mills, au două defecte: nu conţin în spectru fermioni şi presupun existenţa particulelor nefizice, tachionii. O teorie consistentă, fără tachioni, se poate construi într-un spaţiu - timp 26 dimensional.

Includerea supersimetriei a adus două îmbunătăţiri majore şi anume, înlătură tachionii şi coboară numărul de dimensiuni la 10. Teoria superstringurilor pare deci să ofere posibilitatea construirii unei teorii cuantice relativiste de câmp, care să rămână finită şi după includerea gravitaţiei, iar numărul mare de dimensiuni nu constituie o problemă atunci când ştim să le compactificăm până la 4.

Nu putem afirma însă că există o legătură directă între fenomenologia Modelului Standard şi teoria superstringurilor [21], care, de altfel, nu soluţionează nici problema găurilor negre şi a singularităţilor iniţiale din cosmologie. In plus, teoria stringurilor şi superstringurilor ne furnizează informaţii numai la scala Planck, neputând fi deci verificată experimental decât, eventual, indirect.

Deşi în ultimii 20 de ani, fiecare dintre direcţiile abordate în cuprinsul acestei introduceri s-a dezvoltat în mod spectaculos, deficienţele existente şi a căror trecere în revistă am facut-o mai sus, sunt semnale că problema este departe de a-şi fi găsit o soluţie satisfăcătoare.

Revenind la problema originară a trecerii de la relativitatea specială la cea generală, se pune întrebarea dacă o formă modificată a teoriilor Yang - Mills poate realiza această trecere. Impreună cu un grup Lie compact semisimplu, se folosesc grupuri Lorentz omogene şi neomogene, care acţionează atât pe spaţiu - timp, cât şi pe câmpurile dinamice, în scopul construirii unor teorii gauge extinse (faţă de grupuri interne şi externe) pentru gravitaţie şi restul materiei. Printre direcţiile de abordare a acestui subiect, cele mai promiţătoare, atât sub aspectul penetrabilităţii ştiinţifice cât şi al eleganţei şi coerenţei mate- matice, sunt cele care au la bază generalizarea noţiunii de varietate diferenţiabilă şi a câmpurilor şi obiectelor geometrice fundamentale, definite pe aceasta,

prin introducerea noţiunii de fibrat principal şi fibrat vectorial.

Prin utilizarea tehnicilor uzuale de lucru cu acestea, rolul dominant fiind deţinut de legile de derivare şi de câmpurile geometrice esenţiale (metric fundamental, de curbură), s-a reuşit elaborarea unor modele unitare de geometrizare a câmpurilor gauge neabeliene, în prezenţa gravitaţiei [22,23]. Cercetările contemporane, în această direcţie, caută să-i desăvârşească completitudinea ştiinţifică prin includerea, în cadrul acestei tentative de geometrizare, a câmpurilor principalelor surse materiale, elaborându-se modele care, în limita energiilor joase, respectă principiul euristic [24,25].

După cum am văzut pe parcursul celor patru capitole ale prezentei lucrări, alegerea variatăţii spaţio-temporale $S^3 \times R$, pentru generalizarea teoriilor de pe spaţiul Minkowski, pe lângă motivaţia istorică de a fi primul model de Univers, este deosebit de atractivă din punctul de vedere al simetriei sale ridicate. Aceasta permite utilizarea tehnicilor din teoria grupurilor în vederea studiului câmpurilor bozonice şi fermionice pe această varietate. Separarea dimensiunii temporale şi compactificarea spaţiului tridimensional, permit aplicarea formalismului hamiltonian pentru dezvoltarea teoriilor cuantice, prin utilizarea variabilelor Ashtekar [26,27].

In plus, D. Sen a arătat [28] că o parte din rezultatele ce nu pot fi obţinute direct în spaţiul minkowskian, se obţin prin trecerea la limită a celor de pe $S^3 \times R$. De exemplu, într-o teorie cu supersimetrie globală, se defineşte indicele Witten ca fiind egal cu diferenţa dintre numărul stărilor bozonice şi fermionice. Pentru a evalua numărul de stări, teoria se formulează într-un volum finit astfel încât spectrul energetic să fie discret. Prin utilizarea varietăţii $S^3 \times R$, se extinde clasa teoriilor în

care acest indice poate fi calculat. In cazul unui rezultat nenul, pentru orice valoare a razei lui S^3, teoria nu rupe supersimetria în spaţiul Minkowski.

In continuare, după o trecere în revistă a principalelor caracteristici ale modelului interacţiunilor electroslabe, elaborat de Weinberg şi Salam, în spaţiu - timp plat, vom trece la formularea tetradică Lorentz - gauge invariantă a acestuia, în Universul Einstein.

5.2 Modelul Weinberg - Salam în spaţiu - timpul Minkowski

Teoria electroslabă unifică electrodinamica cuantică cu teoria interacţiunilor slabe, la energii joase. Prezicerea curenţilor neutri, alături de alte verificări experimentale, au sporit, de-a lungul anilor, încrederea cercetătorilor în larga aplicabilitate a acestei teorii, deja considerată clasică şi dezvoltată în orice curs dedicat particulelor elementare şi interacţiunilor dintre acestea [29-36].

Menţionăm că în cadrul prezentului paragraf, metrica varietăţii minkowskiene va fi cea înlâlnită în literatura de specialitate, adică

$$\eta_{\mu\nu} = (1, -1, , -1, -1)$$

5.2.1 Lagrangeianul teoriei

Interacţiunile electroslabe îşi datorează numele intensităţii lor.

La energii joase, conform teoriei interacţiunilor celor patru fermioni (Fermi, 1934), tăria interacţiunii este determinată de constanta Fermi de cuplaj

$$G_F = 1,16637(2) \times 10^{-5}\ \text{GeV}^{-2} \tag{5.1}$$

lagrangeianul efectiv al teoriei fiind [36]

$$\mathcal{L}_{ef} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} J^{\dagger}_{\alpha} J^{\alpha} + h.c. \tag{5.2}$$

curenţii fermionici încărcaţi, conţinând o parte leptonică şi una hadronică

$$J_\alpha = J_{\alpha l} + J_{\alpha h} \tag{5.3}$$

cu

$$\begin{aligned} J_{\alpha l} &= \bar{\nu}_l \gamma_\alpha e + \bar{\nu}_\mu \gamma_\alpha \mu \\ J_{\alpha h} &= \bar{p} \gamma_\alpha n \end{aligned} \tag{5.4}$$

Dar, o astfel de teorie, având indicele de divergenţă 2, nu este renormabilă, divergenţele neputând fi absorbite prin redefinirea constantelor de cuplaj [30].

Pe de altă parte, la energii înalte, contribuţia propagatorului bozonului vectorial cu masă nu mai poate fi neglijată. Deoarece raza de acţiune a interacţiunilor slabe este foarte mică,

$$r_W \approx 2 \cdot 10^{-16}\ \text{cm}$$

rezultă următoarea valoare aproximativă a masei bozonului intermediar

$$m_W = \frac{h}{2\pi r_W c} \approx 81\ \text{GeV}$$

ceea ce ar conduce la un lagrangeian de tipul

$$\mathcal{L}_W = -\frac{1}{4}(\partial_\mu W_\nu^\dagger - \partial_\nu W_\mu^\dagger)(\partial^\mu W^\nu - \partial^\nu W^\mu) + m_W^2 W_\mu^\dagger W^\mu \qquad (5.5)$$

care, de asemenea, nu este renormabil. Dar, după cum se poate demonstra, ruperea spontană de simetrie şi mecanismul Higgs nu strică renormabilitatea teoriei [32]. Ideea este deci, de a se porni cu o teorie gauge, cu câmpuri vectoriale nemasive, deci renormabilă, în care masele bozonilor intermediari să fie generate prin mecanism Higgs.

Cum atât teoria interacţiunilor electromagnetice, cât şi cea a interacţiunilor slabe pot fi dezvoltate similar, ca teorii gauge faţă de diferite grupuri interne, apare deci posibilitatea unificării lor în cadrul unei teorii unice. După ce Schwinger, în 1957, a avansat pentru prima oară ideea acestei unificări, S.L. Glashow (1961), S. Weinberg (1967) şi A. Salam (1968) construiesc modelul ce le poartă numele, având la bază grupul de etalonare $SU(2) \times U(1)$, şi căruia ulterior i se va demonstra renormabilitatea (Hooft, 1971 [5]).

Desigur, o teorie care să unifice cele două interacţiuni trebuie să ţină cont de diferenţa enormă dintre masele particulelor vectoriale ce le mediază.

Referitor la alegerea grupului de simetrie, ea se justifică astfel. Sarcinile asociate celor trei curenţi, care se cuplează la câmpul electromagnetic, A_μ, şi la bozonii masivi încărcaţi $W_\mu^\pm$ nu formează o algebra Lie tridimensională închisă. In concluzie, grupul de simetrie internă cu trei generatori, $SU(2)$, trebuie extins, cea mai simplă combinaţie fiind produsul direct $SU(2) \times U(1)$. Asupra celor patru generatori, cei ai grupului $SU(2)$ şi sarcina electrică Q, corespunzătoare lui $U(1)$ şi a curenţilor la care aceştia se cuplează, vom reveni în paragrafele următoare.

Odată stabilit grupul intern, densitatea de lagrangeian invariantă faţă de acesta va fi

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3 + \mathcal{L}_4 \tag{5.6}$$

unde

$$\mathcal{L}_1 = -\frac{1}{4} F^i_{\mu\nu} F_i^{\mu\nu} - \frac{1}{4} G_{\mu\nu} G^{\mu\nu} \tag{5.7}$$

cu

$$F^i_{\mu\nu} = \partial_\mu A^i_\nu - \partial_\nu A^i_\mu + g\varepsilon^{ijk} A_{\mu j} A_{\nu k} \tag{5.8}$$

$$G_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \tag{5.9}$$

este lagrangeianul câmpurilor de etalonare,

$$\mathcal{L}_2 = \bar{\psi} i \gamma^\mu D_\mu \psi \tag{5.10}$$

este lagrangeianul local invariant al câmpurilor fermionice nemasive, $\mathcal{L}_3$ este lagrangeianul câmpului scalar complex, cu simetrie ruptă spontan, care va juca rolul esenţial în mecanismul Higgs, iar $\mathcal{L}_4$ exprimă un cuplaj, de tip Yukawa, între scalari şi fermioni.

Cum asupra termenilor $\mathcal{L}_2$ şi $\mathcal{L}_3$, vom reveni în secţiunile următoare ale acestui paragraf, să ne ocupăm acum de noţiunea de invarianţă locală şi de câmpurile gauge ale teoriei. După cum se cunoaşte, pentru ca lagrangeianul Dirac uzual

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi \tag{5.11}$$

să fie invariant faţă de grupul $U(1)$ al transformărilor locale

$$U(\alpha) = e^{-i\alpha(x)} \tag{5.12}$$

trebuie ca nu numai câmpurile să se transforme după legea

$$\begin{aligned} \psi &\rightarrow \psi\prime &= e^{-i\alpha(x)}\psi \\ \bar{\psi} &\rightarrow \bar{\psi}\prime &= e^{i\alpha(x)}\bar{\psi} \end{aligned} \tag{5.13}$$

dar şi derivatelor lor, adică

$$\begin{aligned} D_\mu\psi &\rightarrow (D_\mu\psi)\prime &= e^{-i\alpha(x)}D_\mu\psi \\ D_\mu\bar{\psi} &\rightarrow (D_\mu\bar{\psi})\prime &= e^{i\alpha(x)}D_\mu\bar{\psi} \end{aligned} \tag{5.14}$$

Considerând, în (5.14), derivata gauge $U(1)$ de forma uzuală

$$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu \tag{5.15}$$

unde constanta de cuplaj, e, este chiar sacrina electronului, rezultă următoarea lege de transformare a câmpului gauge

$$A_\mu \rightarrow A_\mu\prime = A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha \tag{5.16}$$

pentru care tensorul câmpului electromagnetic (5.9) rămâne invariant, adică

$$F_{\mu\nu}\prime = F_{\mu\nu} \tag{5.17}$$

având lagrangeianul corespunzător $-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$.

In concluzie, lagrangeianul Dirac (5.11) va fi înlocuit cu forma $U(1)$ - gauge covariantă

$$\mathcal{L}_D = \bar{\psi}i\gamma^\mu(\partial_\mu + ieA_\mu)\psi - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{5.18}$$

In mod analog, putem considera al alt grup intern, de această dată neabelian, de exemplu $SU(2)$, cu elementele

$$U(\theta) = \exp\left[-i\frac{\vec{\sigma}}{2}\cdot\vec{\theta}(x)\right] \tag{5.19}$$

trebuie ca nu numai câmpurile să se transforme după legea

$$\psi \rightarrow \psi\prime = e^{-i\alpha(x)}\psi$$
$$\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}\prime = e^{i\alpha(x)}\bar{\psi} \quad (5.13)$$

dar şi derivatelor lor, adică

$$D_\mu\psi \rightarrow (D_\mu\psi)\prime = e^{-i\alpha(x)}D_\mu\psi$$
$$D_\mu\bar{\psi} \rightarrow (D_\mu\bar{\psi})\prime = e^{i\alpha(x)}D_\mu\bar{\psi} \quad (5.14)$$

Considerând, în (5.14), derivata gauge $U(1)$ de forma uzuală

$$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu \quad (5.15)$$

unde constanta de cuplaj, e, este chiar sacrina electronului, rezultă următoarea lege de transformare a câmpului gauge

$$A_\mu \rightarrow A_\mu\prime = A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha \quad (5.16)$$

pentru care tensorul câmpului electromagnetic (5.9) rămâne invariant, adică

$$F_{\mu\nu}\prime = F_{\mu\nu} \quad (5.17)$$

având lagrangeianul corespunzător $-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$.

In concluzie, lagrangeianul Dirac (5.11) va fi înlocuit cu forma $U(1)$ - gauge covariantă

$$\mathcal{L}_D = \bar{\psi}i\gamma^\mu(\partial_\mu + ieA_\mu)\psi - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (5.18)$$

In mod analog, putem considera al alt grup intern, de această dată neabelian, de exemplu $SU(2)$, cu elementele

$$U(\theta) = \exp\left[-i\frac{\vec{\sigma}}{2}\cdot\vec{\theta}(x)\right] \quad (5.19)$$

şi ai cărui generatori satisfac algebra

$$\left[\frac{\sigma_i}{2}, \frac{\sigma_j}{2}\right] = i\varepsilon_{ijk}\frac{\sigma^k}{2} \tag{5.20}$$

unde $\{\sigma_i\}_{i=\overline{1,3}}$ sunt matricile Pauli.

Relaţiile de transformare pentru funcţie vor fi

$$\begin{aligned} \psi &\rightarrow \psi\prime = U(\theta)\psi \\ \bar{\psi} &\rightarrow \bar{\psi}\prime = \bar{\psi}\, U^{-1}(\theta) \end{aligned} \tag{5.21}$$

iar cele pentru derivate

$$\begin{aligned} D_\mu\psi &\rightarrow (D_\mu\psi)\prime = U(\theta)\psi \\ \overline{D_\mu\psi} &\rightarrow (\overline{D_\mu\psi})\prime = \overline{D_\mu\psi}\, U^{-1}(\theta) \end{aligned} \tag{5.22}$$

Luând derivata $SU(2)$ - gauge covariantă de forma

$$D_\mu = \partial_\mu - ig\frac{\vec{\sigma}}{2}\cdot\vec{A}_\mu \tag{5.23}$$

găsim următoarea lege de transformare pentru câmpurile de etalonare

$$\frac{\vec{\sigma}}{2}\cdot\vec{A}_\mu\prime = U\frac{\vec{\sigma}}{2}\cdot\vec{A}_\mu U^{-1} - \frac{i}{g}(\partial_\mu U)U^{-1} \tag{5.24}$$

sau, dacă scriem (5.19) în forma sa infinitezimală

$$U(\theta) = 1 - i\frac{\vec{\sigma}}{2}\cdot\vec{\theta} + \mathcal{O}(\theta^2) \tag{5.25}$$

legea de transformare (5.24) devine

$$A^k_\mu\prime = A^k_\mu + \varepsilon^{ijk}\theta_i A_{\mu j} - \frac{1}{g}\partial_\mu\theta^k \tag{5.26}$$

In expresiile de mai sus, pentru simplitate, se poate folosi notaţia

$$A_\mu = \frac{\vec{\sigma}}{2}\cdot\vec{A}_\mu \tag{5.27}$$

Corespunzător, vom găsi pentru tensorul Yang - Mills

$$F^i_{\mu\nu} = \partial_\mu A^i_\nu - \partial_\nu A^i_\mu + g\varepsilon^{ijk} A_{\mu j} A_{\nu k} \tag{5.28}$$

legea de transformare

$$\frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot \vec{F}_{\mu\nu}{}' = U\left(\frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot \vec{F}_{\mu\nu}\right) U^{-1} \tag{5.29}$$

sau, infinitezimal

$$F^i_{\mu\nu}{}' = F^i_{\mu\nu} + \varepsilon^{ijk}\theta_j F_{\mu\nu k} \tag{5.30}$$

Lagrangeianul Dirac $SU(2)$ - gauge invariant are expresia

$$\mathcal{L}_D = \bar{\psi} i\gamma^\mu \left(\partial_\mu - ig\frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot \vec{A}_\mu\right)\psi - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}\vec{F}_{\mu\nu} \cdot \vec{F}^{\mu\nu} \tag{5.31}$$

cu $F^i_{\mu\nu}$ dat de (5.28).

In cele prezentate mai sus, am considerat două grupuri gauge, $U(1)$ şi $SU(2)$, cu constantele de cuplaj e şi respectiv g. Pentru fiecare grup simplu, cu reprezentare ireductibilă, există o singură constantă de cuplaj. Dacă se consideră un produs direct de grupuri simple, de exemplu $SU(2) \times U(1)$, atunci teoria conţine ambele constante de cuplaj.

5.2.2 Mecanismul Higgs

Pentru început, să definim conceptul de simetrie ruptă spontan.

Spunem că un hamiltonian H_0 are simetria exactă dacă el rămâne invariant la transformarea

$$UH_0U^{+} = H_0\,, \; U \in SU(N) \tag{5.32}$$

adică H_0 comută cu U

$$UH_0 = H_0U \tag{5.33}$$

Dezvoltându-l în serii pe U şi neglijând puterile superioare ale lui θ,

$$U(\theta) = 1 - i\theta^k T_k + \mathcal{O}(\theta^2) \tag{5.34}$$

găsim că invarianţa lui H_0 se poate exprima prin faptul că acesta comută cu generatorii $\{T_k\}$ ai grupului $SU(N)$.

Dacă hamiltonianul H rămâne invariant faţă de transformările grupului $SU(N)$, dar starea de vid $|0\rangle$, (definită ca stare de energie minimă) nu mai este invariantă, atunci spunem că avem o rupere spontană de simetrie. In acest caz, condiţia

$$U|0\rangle \neq |0\rangle \tag{5.35}$$

se scrie ca

$$T_k|0\rangle \neq 0 \tag{5.36}$$

şi caracterizează ruperea de simetrie, faţă de grupul intern $SU(N)$.

Putem vorbi despre o ruperea spontană a simetriei globale, caz în care, conform teoremei Goldstone, apar o serie de particule, fără masă şi fără spin, denumite bozoni Goldstone [29]. In urma ruperii spontane şi a simetriei locale, bozonii Goldstone sunt "înghiţiţi" de către câmpurile gauge, care capătă masă. Fenomenul poartă numele de mecanism Higgs. In situaţia în care nu se rup toate simetriile locale, rămânând simetrii reziduale, numărul câmpurilor gauge masive va fi egal cu numărul generatorilor simetriei iniţiale minus numărul generatorilor simetriei finale.

Acesta este şi cazul modelului Weinberg - Salam. După cum vom vedea, din cele patru câmpuri gauge corespunzătoare grupului de eta-

ionare $SU(2) \times U(1)$, trei vor căpăta masă, prin mecanism Higgs, iar al patrulea (fotonul), corespunzând unei simetrii reziduale $U(1)_{em}$, va rămâne fără masă.

In continuare, să revenim la expresia (5.6), a lagrangeianului ce descrie interacţiunile electroslabe şi să ne concentrăm asupra termenului $\mathcal{L}_3$. Acesta caracterizează un dublet scalar complex şi are forma

$$\mathcal{L}_3 = (D_\mu\phi)^\dagger(D^\mu\phi) + m^2\phi^\dagger\phi - \lambda(\phi^\dagger\phi)^2 \tag{5.37}$$

unde derivata $SU(2) \times U(1)$ gauge - covariantă

$$D_\mu\phi = \left(\partial_\mu - ig\frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot \vec{A}_\mu - ig\prime\frac{Y}{2}B_\mu\right)\phi \tag{5.38}$$

conţine atât generatorii grupului grupului $SU(2)$, corespunzători izospinului, cât şi generatorul lui $U(1)$, care este în acest caz hipersarcina Y.

Schimbarea semnului din faţa termenului $m^2\phi^\dagger\phi$ implică o rupere spontană de simetrie. Intr-adevăr, condiţia de minim a potenţialului

$$\frac{\partial V}{\partial \phi^\dagger} = 0$$
$$\frac{\partial V}{\partial \phi} = 0 \tag{5.39}$$

pune în evidenţă o valoare nenulă a stării de vid

$$\phi_0 = \langle 0|\phi|0\rangle = \frac{v}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv \frac{v}{\sqrt{2}}\chi \tag{5.40}$$

unde am introdus notaţia

$$v^2 = \frac{m^2}{\lambda} \tag{5.41}$$

Se verifică imediat condiţia de rupere spontană de simetrie, atât pentru $SU(2)$ cât şi pentru $U(1)$, deoarece

$$\sigma^1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0$$

$$\sigma^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0$$

$$\sigma^3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0$$

$$Y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0 \tag{5.42}$$

In schimb, combinaţia

$$Q = \frac{1}{2}(\sigma_3 + Y)$$

corespunzând sarcinii electrice şi generând o simetrie $U(1)_{em}$, lasă invariantă starea de vid (5.40). Deci, simetria $SU(2) \times U(1)$ se rupe după schema

$$SU(2) \times U(1)_Y \rightarrow U(1)_{em}$$

teoria având o simetrie reziduală, faţă de grupul $U(1)_{em}$. In consecinţă, din cele patru câmpuri gauge, trei vor căpăta masă, prin mecanism Higgs, iar al patrulea, fotonul, rămâne de masă nulă.

Efectuăm în lagrangeianul (5.37) translaţia

$$\phi \rightarrow \phi + \phi_0$$

şi obţinem

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_3 = & \left[\left(\partial_\mu - ig\frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot \vec{A}_\mu - ig'\frac{B_\mu}{2}\right)(\phi + \phi_0)\right]^\dagger \\ & \left[\left(\partial^\mu - ig\frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot \vec{A}^\mu - ig'\frac{B^\mu}{2}\right)(\phi + \phi_0)\right] \\ & + m^2(\phi + \phi_0)^\dagger(\phi + \phi_0) - \lambda[(\phi + \phi_0)^\dagger(\phi + \phi_0)]^2 \end{aligned} \tag{5.43}$$

şi separăm termenul liber $\mathcal{L}_3^0$ de partea de interacţiune $\mathcal{L}_3^I$.

Să ne focaliză atenţia, pentru început asupra părţii

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_3^0 &= \frac{g^2v^2}{8}(\vec{A}_\mu)^2 + \frac{g\prime^2v^2}{8}(B_\mu)^2 + gg\prime B^\mu A_\mu^i\phi_0^\dagger\frac{\sigma_i}{2}\phi_0 + \\ &+ igA_\mu^i\left(\phi_0^\dagger\frac{\sigma_i}{2}\partial^\mu\phi - \partial^\mu\phi^\dagger\frac{\sigma_i}{2}\phi_0\right) + ig\prime\frac{B_\mu}{2}\left(\phi_0^\dagger\partial^\mu\phi - \partial^\mu\phi^\dagger\phi_0\right) + \\ &+ \partial_\mu\phi^\dagger\partial^\mu\phi + V(\phi^\dagger,\phi)\end{aligned} \tag{5.44}$$

în care primii termeni ne vor da chiar masele bozonilor intermediari. Astfel, din

$$\begin{aligned}&\frac{g^2v^2}{8}(\vec{A}_\mu)^2 + \frac{g\prime^2v^2}{8}(B_\mu)^2 + gg\prime B^\mu A_\mu^i\phi_0^\dagger\frac{\sigma_i}{2}\phi_0 = \\ &= \frac{g^2v^2}{8}\left((A_\mu^1)^2 + (A_\mu^2)^2\right) + \frac{v^2}{8}(gA_\mu^3 - g\prime B_\mu)^2 = \\ &= \frac{g^2v^2}{8}((A_\mu^1)^2 + (A_\mu^2)^2) + \frac{v^2}{8}\begin{pmatrix}A_\mu^3 & B_\mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g^2 & -gg\prime \\ -gg\prime & g\prime^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_3^\mu \\ B^\mu\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{5.45}$$

vom obţine, după diagonalizarea matricii prin efectuarea rotaţiei

$$\tan\theta = \frac{g\prime}{g} \tag{5.46}$$

şi redefinirea câmpurilor de etalonare .

$$\begin{aligned}W_\mu^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(A_\mu^1 - iA_\mu^2\right) \\ W_\mu^- &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(A_\mu^1 + iA_\mu^2\right) \\ Z_\mu &= A_\mu^3\cos\theta - B_\mu\sin\theta \\ A_\mu &= A_\mu^3\sin\theta + B_\mu\cos\theta ,\end{aligned} \tag{5.47}$$

următorii termeni de masă:

$$T = M_W^2 W_\mu^+ W^{\mu -} + \frac{1}{2}M_Z^2 Z_\mu Z^\mu \tag{5.48}$$

unde am introdus notaţiile

$$M_W^2 = \frac{g^2 v^2}{4} \tag{5.49}$$

$$M_Z^2 = \frac{(g^2 + g'^2)v^2}{4} \tag{5.50}$$

In ceea ce priveşte potenţialul scalar $V(\phi^\dagger, \phi)$, acesta poate fi scris

$$V = \lambda(\phi^\dagger \phi - \phi_0^\dagger \phi_0)^2 \tag{5.51}$$

sau, prin exprimare dubletului scalar complex sub forma următoarelor combinaţii de câmpuri reale

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi_1 + i\phi_2 \\ \phi_3 + i\phi_4 \end{pmatrix} \tag{5.52}$$

ca

$$V = \frac{\lambda}{4} \left(\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 + \phi_4^2 - v^2 \right)^2 \tag{5.53}$$

Pentru punerea în evidenţă a bozonilor Goldstone şi explicarea mecanismului Higgs, vom introduce câmpurile

$$\begin{aligned} w^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 - i\phi_2) \\ w^- &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2) \\ z^0 &= \phi_4 \\ H &= \phi_3 - v \end{aligned} \tag{5.54}$$

şi îl vom aduce pe (5.53) la forma

$$V = \frac{\lambda}{4}(2w^+w^- + z^0 z^0 + H^2 + 2Hv)^2 \tag{5.55}$$

unde, aşa cum era de aşteptat, lagrangeianul ales având simetria globală ruptă spontan, în model au apărut particule fără masă şi fără spin, notate cu $w^\mp$, z^0 şi denumite bozoni Goldstone. Aceştia vor fi "înghiţiţi"

de cele trei câmpuri de etalonare, corespunzând simetriilor locale rupte, care capătă masele (5.49-50).

Invers, presupunând cunoscută masa bozonilori $W_\mu^\pm$ şi scoţându-l pe v^2 din (5.49) ca fiind

$$v^2 = \frac{4M_W^2}{g^2} = (246\ \mathrm{GeV})^2\ , \tag{5.56}$$

putem estima masa aproximativă a scalarului Higgs (considerând cuplajul goldstonilor la scalarul Higgs $\lambda/4 \approx 1$)

$$M_H = 2\sqrt{2}v \approx 700\ \mathrm{GeV} \tag{5.57}$$

Descoperirea experimentală a scalarului Higgs ar oferi o mai bună înţelegere a mecanismului ruperii spontane de simetrie, constituind de asemenea, o strălucită confirmare a modelului Weinberg - Salam.

Revenind la expresia (5.44), observăm o serie de termeni mixti, de tipul $A_\mu \partial^\mu \phi$ şi $B_\mu \partial^\mu \phi$, ce trebuie eliminaţi datorită imposibilităţii existenţei unui cuplaj între câmpurile de etalonare şi scalarul ϕ prin ik^μ.

Pentru aceasta, vom modifica condiţia de etalonare de tip Lorentz

$$f = \partial_\mu B^\mu = 0$$

la condiţiile

$$f = \partial_\mu B^\mu + ig\prime \frac{\xi}{2} (\phi^\dagger \phi_0 - \phi_0^\dagger \phi) \tag{5.58}$$

şi respectiv

$$f_i = \partial_\mu A_i^\mu + ig\xi \left(\phi^\dagger \frac{\sigma_i}{2} \phi_0 - \phi_0^\dagger \frac{\sigma_i}{2} \phi \right) \tag{5.59}$$

şi vom adăuga în lagrangeianul teoriei un termen de tipul

$$T_f = -\frac{1}{2\xi} f_i^2 - \frac{1}{2\xi} f^2 \tag{5.60}$$

de cele trei câmpuri de etalonare, corespunzând simetriilor locale rupte, care capătă masele (5.49-50).

Invers, presupunând cunoscută masa bozonilor $W_\mu^\pm$ şi scoţându-l pe v^2 din (5.49) ca fiind

$$v^2 = \frac{4M_W^2}{g^2} = (246\ \mathrm{GeV})^2\,, \tag{5.56}$$

putem estima masa aproximativă a scalarului Higgs (considerând cuplajul goldstonilor la scalarul Higgs $\lambda/4 \approx 1$)

$$M_H = 2\sqrt{2}v \approx 700\ \mathrm{GeV} \tag{5.57}$$

Descoperirea experimentală a scalarului Higgs ar oferi o mai bună înţelegere a mecanismului ruperii spontane de simetrie, constituind de asemenea, o strălucită confirmare a modelului Weinberg - Salam.

Revenind la expresia (5.44), observăm o serie de termeni mixti, de tipul $A_\mu\partial^\mu\phi$ şi $B_\mu\partial^\mu\phi$, ce trebuie eliminaţi datorită imposibilităţii existenţei unui cuplaj între câmpurile de etalonare şi scalarul ϕ prin ik^μ.

Pentru aceasta, vom modifica condiţia de etalonare de tip Lorentz

$$f = \partial_\mu B^\mu = 0$$

la condiţiile

$$f = \partial_\mu B^\mu + ig'\frac{\xi}{2}\left(\phi^\dagger\phi_0 - \phi_0^\dagger\phi\right) \tag{5.58}$$

şi respectiv

$$f_i = \partial_\mu A_i^\mu + ig\xi\left(\phi^\dagger\frac{\sigma_i}{2}\phi_0 - \phi_0^\dagger\frac{\sigma_i}{2}\phi\right) \tag{5.59}$$

şi vom adăuga în lagrangeianul teoriei un termen de tipul

$$T_f = -\frac{1}{2\xi}f_i^2 - \frac{1}{2\xi}f^2 \tag{5.60}$$

O explicaţie mai amplă asupra necesităţii introducerii unui astfel de termen fiind în afara scopului acestei cărţi, vom recomanda cititorului lucrările lui R.P. Feynman (1963) [37], B.S. DeWitt (1967) [38], L.D. Fadeev şi V.N. Popov (1967) [39], în care este complet rezolvată problema cuantificării câmpurilor de etalonare, prin metoda integralei de drum.

În ceea ce ne priveşte, să analizăm ce alţi termeni, pe lângă cei ce au rolul de a elimina produsele mixte, nefizice, de tipul $A_\mu \partial^\mu \phi$, mai apar în (5.60). Constantăm astfel următoarele combinaţii:

- termenii $-\frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A_i^\mu)^2 \; - \; \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu B^\mu)^2$ se adaugă lagrangeianului câmpurilor vectoriale masive. De exemplu, pentru un câmp vectorial masiv B_μ, lagrangeianul va conţine următorii termeni

$$\mathcal{L}_B = -\frac{1}{4}(\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu)(\partial^\mu B^\nu - \partial^\nu B^\mu) + \frac{1}{2} M^2 B_\mu B^\mu - \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu B_\mu)^2 \tag{5.61}$$

conducând la ecuaţia de câmp

$$\left(g^{\mu\nu} \partial^2 - \partial^\mu \partial^\nu + \frac{1}{\xi} \partial^\mu \partial^\nu + M^2 \right) B_\mu = -J^\nu \tag{5.62}$$

ce pune în evidenţă expresia renormabilă a propagatorului, într-un etalon ξ oarecare,

$$i\Delta_{\mu\nu}(k) = -i \left(g_{\mu\nu} - (1-\xi) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 - \xi M^2} \right) \frac{1}{k^2 - M^2 + i\varepsilon} \tag{5.63}$$

- Ceilalţi termeni

$$\frac{g^2 \xi}{2} \left(\phi^\dagger \frac{\sigma_i}{2} \phi_0 - \phi_0^\dagger \frac{\sigma_i}{2} \phi \right)^2 + \frac{g'^2 \xi}{8} \left(\phi^\dagger \phi_0 - \phi_0^\dagger \phi \right)^2 \tag{5.64}$$

în care scriem dubletul scalar sub forma

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\rho\\ \zeta\end{pmatrix} \tag{5.65}$$

cu ρ şi ζ daţi de (5.52), formează combinaţiile

$$\frac{g^2v^2\xi}{16}\left[\frac{1}{2}(\zeta^*)^2 - 2\rho^*\rho - \zeta^*\zeta + \frac{1}{2}\zeta^2\right] +$$
$$+ \frac{g'^2v^2\xi}{16}\left[\frac{1}{2}(\zeta^* - \zeta)^2\right] = -\frac{g^2v^2\xi}{8}\rho^*\rho - \frac{(g^2g'^2)v^2\xi}{8}\phi_4^2 =$$
$$= -\frac{1}{2}\xi M_W^2\left(\phi_1^2 + \phi_2^2\right) - \frac{1}{2}\xi M_Z^2\phi_4^2 \tag{5.66}$$

Adăugând şi termenii cinetici corespunzători câmpurilor scalare, din (5.44), obţine lagrangeianul particulelor fictive ϕ_1, ϕ_2 şi ϕ_4, denumite *would - be Goldstone*, de forma

$$\mathcal{L}_{124} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi_1\partial^\mu\phi_1 + \frac{1}{2}\partial_\mu\phi_2\partial^\mu\phi_2 + \frac{1}{2}\partial_\mu\phi_2\partial^\mu\phi_2 -$$
$$-\frac{1}{2}\xi M_W^2\phi_1^2 - \frac{1}{2}\xi M_W^2\phi_2^2 - \frac{1}{2}\xi M_Z^2\phi_4^2 \tag{5.67}$$

conducând la propagatorii

$$\frac{i}{k^2 - \xi M_W^2 + i\varepsilon}$$

pentru ϕ_1 şi ϕ_2 şi la

$$\frac{i}{k^2 - \xi M_Z^2 + i\varepsilon}$$

pentru ϕ_4. In ceea ce priveşte, câmpul scalar real notat cu ϕ_3, acesta corespunde bozonului Higgs, de masă $m\sqrt{2}$ şi are propagatorul

$$\frac{i}{k^2 - 2m^2 + i\varepsilon}$$

5.2.3 Fermionii în modelul Weinberg - Salam

Să ne ocupăm, în cele ce urmează, de termenul $\mathcal{L}_2$ din lagrangeianul modelului interacţiunilor electroslabe. Acesta descrie sectorul fermionic şi este dat de relaţia (5.10) cu derivata covariantă de tipul (5.38). Utilizând reprezentarea matricile γ

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \\ \gamma_i &= \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \\ \gamma_5 &= i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 \end{aligned} \tag{5.68}$$

şi despicând funcţia de undă în partea *left-handed* şi cea *right-handed*, adică

$$\begin{aligned} \psi &= \psi_L + \psi_R \\ \psi_L &= \frac{1}{2}(1-\gamma_5)\psi \\ \psi_R &= \frac{1}{2}(1+\gamma_5)\psi \end{aligned} \tag{5.69}$$

termenii de tipul $\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$, cuprinzând un sector leptonic şi unul hadronic, (5.3), vor avea, la rândul lor, o parte *left-handed*, corespunzătoare dubleţilor

$$l_L^i = \begin{pmatrix} \nu_e^i \\ e^i \end{pmatrix}_L, \text{ cu } i = \overline{1,3} \tag{5.70}$$

cu hipersarcina $Y = -1$ şi respectiv

$$q_L^i = \begin{pmatrix} u^i \\ d^i \end{pmatrix}_L, \text{ cu } i = \overline{1,3} \tag{5.71}$$

cu hipersarcina $Y = \frac{1}{3}$ şi o parte *right-handed*, pentru singleţii e_R^i, u_R^i, d_R^i, cu hipersarcinile $Y(e_R) = -2$, $Y(u_R) = \frac{4}{3}$, $Y(d_R) = -\frac{2}{3}$.

Tinând cont de toate acestea şi înlocuind pe A_μ^1, A_μ^2, A_μ^3, B_μ din (5.47), vom separa, în (5.10), termenul de interacţiune de tipul $\mathcal{L}_I = gJ_\mu A^\mu$ într-o parte *left-handed*

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{IL} &= \frac{g}{2\sqrt{2}}\bar{\psi}\gamma^\mu(1-\gamma_5)\sigma_+\psi W_\mu^+ + \frac{g}{2\sqrt{2}}\bar{\psi}\gamma^\mu(1-\gamma_5)\sigma_-\psi W_\mu^- - \\ &- \frac{1}{2}g\sin\theta_W\bar{\psi}\gamma^\mu(1-\gamma_5)\psi A_\mu + \\ &+ \frac{g}{4\cos\theta_W}\bar{\psi}\gamma^\mu(1-\gamma_5)(\cos^2\theta_W\sigma^3 - \frac{g'}{g}\sin\theta_W\cos\theta_W Y)\psi Z_\mu\end{aligned} \tag{5.72}$$

şi una *right-handed*

$$\mathcal{L}_{IR} = -\frac{1}{4}g'\sin\theta_W\bar{\psi}\gamma^\mu(1+\gamma_5)Y\psi Z_\mu + \frac{1}{4}g'\cos\theta_W\bar{\psi}\gamma^\mu(1+\gamma_5)Y\psi A_\mu \tag{5.73}$$

unde am introdus notaţiile

$$\begin{aligned}\sigma_+ &= \frac{1}{2}(\sigma_1 + i\sigma_2) = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\\ \sigma_- &= \frac{1}{2}(\sigma_1 - i\sigma_2) = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{5.74}$$

Lagrangeianul total de interacţiune este suma termenilor anteriori, adică

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{g}{2\sqrt{2}}\bar{\psi}\gamma^\mu(1-\gamma_5)\sigma_+\psi W_\mu^+ + \frac{g}{2\sqrt{2}}\bar{\psi}\gamma^\mu(1-\gamma_5)\sigma_-\psi W_\mu^- + \\ &+ \frac{g\sin\theta_W}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu(1-\gamma_5)\left(\frac{\sigma^3}{2}+\frac{Y}{2}\right)\psi A_\mu + \\ &+ \frac{g'\cos\theta_W}{4}\bar{\psi}\gamma^\mu(1+\gamma_5)Y\psi A_\mu + \\ &+ \frac{g}{4\cos\theta_W}\bar{\psi}\gamma^\mu(1-\gamma_5)\left(\cos^2\theta_W\sigma^3 - \frac{g'}{g}\sin\theta_W\cos\theta_W Y\right)\psi Z_\mu - \\ &- \frac{g'\sin\theta_W}{4}\bar{\psi}\gamma^\mu(1+\gamma_5)Y\psi Z_\mu\end{aligned} \tag{5.75}$$

Particularizând expresia de mai sus pentru dubletul leptonic, vom obţine următoarele tipuri de termeni:

- $g_W \bar{\nu}_e \gamma^\mu (1-\gamma_5) e W^+_\mu$ + h.c.
- $-|e|\bar{e}\gamma^\mu e A_\mu$
- $\frac{g}{4\cos\theta_W}\bar{\nu}_e\gamma^\mu(1-\gamma_5)\nu_e Z_\mu$
- $\frac{g}{4\cos\theta_W}\bar{e}\gamma^\mu(4\sin^2\theta_W - 1 + \gamma_5) e Z_\mu$

iar pentru sectorul cuarcilor

- $g_W \bar{u}\gamma^\mu(1-\gamma_5) d W^+_\mu$ + h.c.
- $\frac{2}{3}|e|\bar{u}\gamma^\mu u A_\mu - \frac{1}{3}|e|\bar{d}\gamma^\mu d A_\mu$
- $\frac{g}{4\cos\theta_W}\bar{u}\gamma^\mu\left(1-\frac{8}{3}\sin^2\theta_W - \gamma_5\right) u Z_\mu$
- $\frac{g}{4\cos\theta_W}\bar{d}\gamma^\mu\left(-1+\frac{4}{3}\sin^2\theta_W + \gamma_5\right) d Z_\mu$

unde am notat cu $|e|$ modulul sarcinii electronului.

5.3 Interacţiuni electroslabe în formulare tetradică Lorentz - gauge invariantă

Scopul acestui paragraf este formularea unei teorii $SO(3,1) \times SU(2) \times U(1)$ - gauge invariantă şi obţinerea sistemului de ecuaţii Dirac - Klein - Gordon - Maxwell - Yang - Mills, pe spaţiu - timpul $S^3 \times R$ [40,41].

Particularizând expresia de mai sus pentru dubletul leptonic, vom obţine următoarele tipuri de termeni:

- $g_W \bar{\nu}_e \gamma^\mu (1-\gamma_5) e W_\mu^+ + \text{h.c.}$
- $-|e|\bar{e}\gamma^\mu e A_\mu$
- $\frac{g}{4\cos\theta_W}\bar{\nu}_e \gamma^\mu (1-\gamma_5)\nu_e Z_\mu$
- $\frac{g}{4\cos\theta_W}\bar{e}\gamma^\mu (4\sin^2\theta_W - 1 + \gamma_5) e Z_\mu$

iar pentru sectorul cuarcilor

- $g_W \bar{u}\gamma^\mu (1-\gamma_5) d W_\mu^+ + \text{h.c.}$
- $\frac{2}{3}|e|\bar{u}\gamma^\mu u A_\mu - \frac{1}{3}|e|\bar{d}\gamma^\mu d A_\mu$
- $\frac{g}{4\cos\theta_W}\bar{u}\gamma^\mu \left(1-\frac{8}{3}\sin^2\theta_W - \gamma_5\right) u Z_\mu$
- $\frac{g}{4\cos\theta_W}\bar{d}\gamma^\mu \left(-1+\frac{4}{3}\sin^2\theta_W + \gamma_5\right) d Z_\mu$

unde am notat cu $|e|$ modulul sarcinii electronului.

5.3 Interacţiuni electroslabe în formulare tetradică Lorentz - gauge invariantă

Scopul acestui paragraf este formularea unei teorii $SO(3,1) \times SU(2) \times U(1)$ - gauge invariantă şi obţinerea sistemului de ecuaţii Dirac - Klein - Gordon - Maxwell - Yang - Mills, pe spaţiu - timpul $S^3 \times R$ [40,41].

Pentru sistemul format din câmpuri bozonice şi fermionice, vom porni de la densitatea totală de lagrangeian, invariantă faţă de grupul intern $G \times U(1)$, de forma

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}[\phi] + \mathcal{L}[\psi] + \mathcal{L}[A^\mu] + \mathcal{L}[A] + \mathcal{L}_i \tag{5.76}$$

unde

$$\mathcal{L}[\phi] = (D^a\phi)^\dagger D_a\phi + M^2\phi^\dagger\phi \tag{5.77}$$

şi

$$\mathcal{L}[\psi] = \frac{1}{2}\left[\bar{\psi}\gamma^a D_a\psi - \overline{D_a\psi}\gamma^a\psi\right] + m\bar{\psi}\psi \tag{5.78}$$

descriu respectiv câmpul scalar masiv, de masă M, şi câmpul Dirac de masă m, termenii

$$\mathcal{L}[A^\mu] = \frac{1}{4}F^\mu_{\ ab}F^{\mu ab} \tag{5.79}$$

şi

$$\mathcal{L}[A] = \frac{1}{4}F_{ab}F^{ab} \tag{5.80}$$

corespund câmpurilor Yang - Mills şi Maxwell, iar ultimul termen din (5.76) exprimă un cuplaj, de tip curent - curent, între scalari şi fermioni.

Considerând acum G ca fiind un grup Lie simplu, a cărui generatori satisfac algebra

$$[T_\mu, T_\nu] = if^\sigma_{\ \mu\nu}T_\sigma \tag{5.81}$$

scriem derivatele covariante sub forma

$$D_a\phi = \phi_{|a} - igA^\mu_a T_\mu\phi - ieA_a\phi \tag{5.82}$$

$$(D_a\phi)^\dagger = \phi^\dagger_{|a} + ig\phi^\dagger T_\mu A^\mu_a + ie\phi^\dagger A_a \tag{5.83}$$

$$D_a\psi = \psi_{|a} + \Gamma_a\psi - igA^\mu_a T_\mu\psi - ieA_a\psi \tag{5.84}$$

şi conjugata sa hermitică, unde cuplajul minimal al câmpurilor materiale la spaţiul - timp curb s-a realizat în acord cu invarianţa $SO(3,1)$ şi cu principiul echivalenţei în formulare locală [42,43].

Tensorii Yang-Mills şi electromagnetic, asociaţi grupului G şi respectiv lui $U(1)$, sunt de forma

$$F^{\mu}_{ab} = A^{\mu}_{[b:a]} + g f^{\mu}_{\alpha\beta} A^{\alpha}_{a} A^{\beta}_{b} \tag{5.85}$$

$$F_{ab} = A_{[b:a]} \tag{5.86}$$

unde : este derivata covariantă Levi - Civita, iar [ ] exprimă antisimetrizarea (fără factorul 1/2).

Ecuaţiile Euler - Lagrange asociate lui (5.76) sunt :

- pentru sectorul scalar

$$D_a \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (D_a \phi)} \right] = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \tag{5.87}$$

şi conjugata sa hermitică,

- pentru sectorul spinorial

$$D_a \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (D_a \psi)} \right] = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} \tag{5.88}$$

şi conjugata sa hermitică,

- pentru câmpurile de etalonare

$$\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^{\mu}_{:a}} \right]_{:a} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^{\mu}} \tag{5.89}$$

şi

$$\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{:a}} \right]_{:a} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A} \tag{5.90}$$

Acestea capătă forma tetradic $SO(3,1) \times G \times U(1)$ - gauge covariantă

$$D_a(D^a\phi) - M^2\phi = 2h(\bar{\psi}\gamma^a\psi)D_a\phi + h(\bar{\psi}\gamma^a\psi)_{;a}\phi \quad (5.91)$$

$$\gamma^a(D_a\psi) + m\psi = -h[\phi^\dagger(D_a\phi) - (D_a\phi)^\dagger\phi]\gamma^a\psi \quad (5.92)$$

şi conjugatele lor hermitice, şi respectiv

$$\begin{aligned} D_b F^b_{\mu a} &= \frac{i}{2} g\bar{\psi}\{\gamma_a, T_\mu\}\psi - ig[\phi^\dagger T_\mu(D_a\phi) - (D_a\phi)^\dagger T_\mu\phi] + \quad (5.93) \\ &+ igh(\phi^\dagger T_\mu\phi)(\bar{\psi}\gamma_a\psi) \\ F^b_{a:b} &= ie\bar{\psi}\gamma_a\psi - ie[\phi^\dagger(D_a\phi) - (D_a\phi)^\dagger\phi] + ieh(\phi^\dagger\phi)(\bar{\psi}\gamma_a\psi) \end{aligned}$$

(5.94)

5.4 Teorii gauge $SU(2) \times U(1)$ în Universul Einstein

Vom alege pentru sfera S^3, de rază unitate, aceeaşi parametrizare şi vom lucra cu tetradul pseudo - ortonormal, (1.180, 184), satisfăcând relaţiile de comutatori

$$[e_a, e_b] = D^c_{\ ab} e_c = 2\varepsilon_{4\ ab}^{\ c} e_c \, , \text{ cu } \varepsilon_{1234} = -1$$

şi cu coeficienţii esenţiali ai conexiunii Levi - Civita

$$\Gamma_{abc} = \varepsilon_{abc4}$$

Teoria dezvoltată mai sus, în formulare Lorentz - gauge covariantă, are avantajul că poate fi materializată în cazul unor grupuri Lie de importanţă fizică, cum ar fi: $SU(2)$, $SU(3)$ sau $SU(2) \times U(1)$.

In cele ce urmează, vom exemplifica sistemul de ecuaţii Klein - Gordon - Dirac - Maxwell - Yang - Mills, la cazul grupului $SU(2) \times U(1)$, esenţial pentru teoria interacţiunilor electroslabe, pentru care constantele de structură $f_{\alpha\beta\sigma}$ sunt chiar

$$f_{\alpha\beta\sigma} = \varepsilon_{\alpha\beta\sigma} \tag{5.95}$$

Tinând cont de aceasta şi înlocuind pe

$$T_\mu = \frac{\sigma_\mu}{2} \tag{5.96}$$

în ecuaţiile (5.91-94), cu derivatele covariante (5.82-84), vom obţine :

(i) pentru câmpul scalar, cuplat minimal la câmpurile de etalonare, pe varietatea $S^3 \times R$

$$\begin{aligned} g^{ab}\phi_{|ba} &- [M^2 + e^2 A_a A^a + \frac{1}{4} g^2 A^\mu_a A^a_\mu]\phi = \\ &= 2\left[h(\bar\psi\gamma^a\psi) + ieA^a + igA^a_\mu \frac{\sigma^\mu}{2}\right]\phi_{|a} + \left\{h(\bar\psi\gamma^a\psi)_{|a} - \right. \\ &- \left. 2h(\bar\psi\gamma^a\psi)\left[ieA^a + igA^a_\mu\frac{\sigma_\mu}{2}\right] + 2egA^a A^\mu_a \frac{\sigma_\mu}{2}\right\}\phi \end{aligned} \tag{5.97}$$

(ii) pentru câmpurile spinoriale

$$\begin{aligned} \gamma^a\psi_{|a} &+ m\psi + \frac{3}{2}\gamma_5\beta\psi - ig\gamma^a A^a_\mu \frac{\sigma_\mu}{2}\psi - ie\gamma^a A_a\psi = \\ &= -h\left\{\left[\phi^\dagger\phi_{|a} - \phi^\dagger_{|a}\phi\right] - 2ig\phi^\dagger A^\mu_a \frac{\sigma_\mu}{2}\phi - 2ie\phi^\dagger A_a\phi\right\}\gamma^a\psi \end{aligned} \tag{5.98}$$

(iii) ecuaţiile Yang-Mills cu surse materiale, pentru grupul intern $SU(2)$

$$\begin{aligned} g^{bc}A_{a|bc} &- 2\varepsilon_{4abc}A^{b|c} - 4(A_a - \delta_a^4 A_4) = \\ &= -ie\bar{\psi}\gamma_a\psi - ieh\phi^\dagger\phi(\bar{\psi}\gamma_a\psi) + \\ &+ ie\left[(\phi^\dagger\phi_{|a} - \phi^\dagger_{|a}\phi) - 2\phi^\dagger\left(igA_\mu^a\frac{\sigma_\mu}{2} + ieA_a\right)\phi\right] \end{aligned} \tag{5.99}$$

(iv) ecuaţiile de tip Maxwell, cu surse materiale, pe varietatea spaţio - temporală $S^3 \times R$

$$\begin{aligned} -A^{|b}_{\mu\alpha|b} &+ 2\varepsilon_{4abc}A_\mu^{b|c} + 4(A_{\mu a} - \delta_a^4 A_4) + 2gf_{\mu\alpha\beta}A^\alpha_{a|b}A^{\beta b} + \\ &+ gf_{\mu\alpha\beta}A^\alpha_b A^{\beta b}_{|a} + 3gf_{\mu\alpha\beta}A^{\alpha b}A^{\beta c}\varepsilon_{abc4} - \\ &- g^2\left[A_{\mu a}(A^\alpha_b A^b_\alpha) - A^b_\mu A^\rho_b A_{\rho a}\right] = \\ &= \frac{i}{2}g\bar{\psi}\left\{\gamma_a, \frac{\sigma_\mu}{2}\right\}\psi - ig\left(\phi^\dagger\frac{\sigma_\mu}{2}\phi_{|a} - \phi^\dagger_{|a}\frac{\sigma_\mu}{2}\phi\right) - \\ &- 2eg\phi^\dagger\frac{\sigma_\mu}{2}\phi A_a - \frac{1}{2}g^2\phi^\dagger\phi A_{\mu a} + igh\left(\phi^\dagger\frac{\sigma_\mu}{2}\phi\right)\left(\bar{\psi}\gamma_a\psi\right) \end{aligned} \tag{5.100}$$

Prin comparaţie cu sistemul de ecuaţii prezentat în paragraful precedent, dedicat modelului Weinberg - Salam, acesta îl generalizează, conţinând un număr mare de termeni suplimentari, datoraţi cuplajului minimal al câmpurilor materiale la spaţiu - timpul $S^3 \times R$.

Bibliografie

[1] Weyl, H., 1950, *Phys. Rev.* **77**, 699.

[2] Yang, C.N., and Mills, R.L., 1954, *Phy. Rev.* **96**, 191.

[3] Lee, T.D., and Yang, C.N., 1957, *Brookhaven National Lab.*, Associated Univ. Inc.

[4] Salam, A., 1957, *Il Nuovo Cimento* **5**, 299.

[5] 't Hooft, G., 1971, *Nucl. Phys.* **B35**, 167.

[6] Weinberg, S., 1067, *Phys. Rev. Lett* **19**, 1264.

[7] Salam, A., 1969, *Elementary Particle Theory*, ed. N. Svartholm, Stockholm: Almquist and Wiksells.

[8] Fritzsch, H., Gell-Mann, M., and Leutwyler, H., 1973, *Phys. Lett* **B47**, 365.

[9] Christenson, J.H., Cronin, J.W., Fitch, V.L., and Turlay, R., 1964, *Phys. Rev. Lett.* **13**, 138.

[10] Paschos, E.A., and Turke, U., 1989, *Phys. Rep.* **178**, 146.

[11] Dariescu, C., and Dariescu, M.A., 1996, *Phys. Lett.* **B378**, 323.

[12] Georgi, H., and Glashow, S.L., 1974, *Phys. Rev. Lett* **32**, 438.

[13] Pati, J.C., and Salam, A., 1973, *phys. Rev.* **D8**, 1240.

[14] Ross, G.G., 1984, *Grand Unified Theories*, Reading: Benjamin/Cummings.

[15] Mohapatra, R.N., 1986, *Unification and Supersymmetry*, New York: Springer-Verlag.

[16] Freund, G.O., 1986, *Introduction to Supersymmetry*, Cambridge: Cambridge Univ. Press.

[17] Sen, D., 1987, *Nucl. Phys.* **B284**, 201.

[18] Nieuwenhuizen, P., 1981, *phys. Rep.* **4**.

[19] Dariescu, C., Dariescu, M.A., et. al., 1992, *Gravitaţia. Pledoarie pentru o nouă teorie a spaţiului şi timpului*, ed. M. Agop, Iaşi: Graphix.

[20] West, P., 1988, CERN-TH Preprint 5165.

[21] Antoniadis, I., Ellis, J., Kelley, S., and Nanopoulos, D., 1991, CERN-TH Preprint 6169.

[22] Cho, Y.M., 1975, Univ. Chicago Preprint EFI 75/2.

[23] Zet, G., Dariescu, C., and Dariescu, M.A., 1993, *TENSOR N.S.* **52**, 14.

[24] Dariescu, C., and Dariescu, M.A., 1991, *Found. Phys.* **21**, 1323.

[25] Dariescu, M.A., and Dariescu, C., 1992, *TENSOR N.S.* **53**, 162.

[26] Ashtekar, A., 1986, *Lectures on Non-perturbative Canonical Gravity*, ed. F.L. Zhi and R. Ruffini, Singapore: World Scientific.

[27] Dariescu, C., Hamamoto, S., and Dariescu, M.A., 1996, *Prog. Theor. Phys.* **95**, 1199.

[28] Sen, D., 1990, *Phys. Rev.* **D41**, 667.

[29] Aitchison, I.J.R., and Hey, A.J.G., 1982, *Gauge Theories in Particle Physics*, Bristol: Adam Hilger.

[30] Bailin, D., and Love, A., 1986, *Introduction to Gauge Field Theory*, Bristol: Adam Hilger.

[31] Chaichian, M., and Nelipa, N.F., 1984, *Introduction to Gauge Field Theories*, Berlin: Springer-Verlag.

[32] Cheng, T.P., and Li, L.F., 1984, *Gauge Theory of Elementary Particle Physics*, Oxford: Clarendon Press.

[33] Kaku, M., 1993, *Quantum Field Theory. A Modern Introduction*, Oxford: Oxford Univ. Press.

[34] Novacu, V., 1984, *Teoria Cuantică a Câmpurilor*, Bucureşti: Ed. Tehnică.

[35] Ramond, P., 1981, *Field Theory. A Modern Primer*, Reading: Benjamin/Cummings.

[36] Taylor, J.C., 1978, *Gauge Theories of Weak Interactions*, Cambridge: Cambridge Univ. Press.

[37] Feynman, R.P., 1963, *Acta Phys. Polon.* **XXIV**, 697.

[38] DeWitt, B.S., 1967, *Phys. Rev.* **162**, 1239.

[39] Fadeev, L.D., and Popov, V.N., 1967, *Phys. Lett.* **25B**, 29.

[40] Dariescu, C., and Dariescu, M.A., 1994, *Found. Phys.* **24**, 1577

[41] Dariescu, M.A., Dariescu, C., and Gottlieb, I., 1994, *Found. Phys.* **25**, 1523.

[42] Canuto, v., 1982, *Int. J. Theor. Phys.* **21**, 633.

[43] Soleng, H.H., 1991, *Gen. Rel. Grav.* **23**, 1089.

Bibliografie

[1] Aitchison, I.J.R., and Hey, A.J.G., 1982, *Gauge Theories in Particle Physics*, Bristol: Adam Hilger.

[2] Antoniadis, I., Ellis, J., Kelley, S., and Nanopoulos, D., 1991, CERN-TH Preprint 6169.

[3] Ashtekar, A., 1986, *Lectures on Non-perturbative Canonical Gravity*, ed. F.L. Zhi and R. Ruffini, Singapore: World Scientific.

[4] Bailin, D., and Love, A., 1986, *Introduction to Gauge Field Theory*, Bristol: Adam Hilger.

[5] Birrell, N.D., and Davies, P.C.W., 1982, *Quantum Fields in Curved Space*, Cambridge: Cambridge Univ. Press.

[6] Canuto, v., 1982, *Int. J. Theor. Phys.* **21**, 633.

[7] Carmeli, M., 1985, *Found. Phys.* **15**, 175.

[8] Carmeli, M., 1985, *Found. Phys.* **15**, 185.

[9] Carmeli, M., and Malin, S., 1985, *Found. Phys.* **15**, 1019.

[10] Carmeli, M., and Malin, S., 1986, *Found. Phys.* **16**, 791.

[11] Carmeli, M., and Malin, S., 1987, *Found. Phys.* **17**, 193.

[12] Carmeli, M., and Malin, S., 1987, *Found. Phys.* **17**, 407.

[13] Chaichian, M., and Nelipa, N.F., 1984, *Introduction to Gauge Field Theories*, Berlin: Springer-Verlag.

[14] Cheng, T.P., and Li, L.F., 1984, *Gauge Theory of Elementary Particle Physics*, Oxford: Clarendon Press.

[15] Cho, Y.M., 1975, Univ. Chicago Preprint EFI 75/2.

[16] Christenson, J.H., Cronin, J.W., Fitch, V.L., and Turlay, R., 1964, *Phys. Rev. Lett.* **13**, 138.

[17] Dariescu, C., and Dariescu, M.A., 1991, *Found. Phys.* **21**, 1323.

[18] Dariescu, C., Dariescu, M.A., et. al., 1992, *Gravitaţia. Pledoarie pentru o nouă teorie a spaţiului şi timpului*, ed. M. Agop, Iaşi: Graphix.

[19] Dariescu, C., and Dariescu, M.A., 1994, *Found. Phys.* **24**, 1577

[20] Dariescu, C., Dariescu, M.A., and Gottlieb, I., 1995, *Proc. GR14 Int. Conf. on General Relativity and Gravitation*, **A.100**, Florence.

[21] Dariescu, C., and Dariescu, M.A., 1995, *Rom. Astron. J.* **5**, 55.

[22] Dariescu, C., and Dariescu, M.A., 1996, in *Lagrange and Finsler Geometry*, ed. P.L. Antonelli and R. Miron, Amsterdam: Kluwer Academic Publishers.

[23] Dariescu, C., and Dariescu, M.A., 1996, *Phys. Lett.* **B378**, 323.

[24] Dariescu, C., Hamamoto, S., and Dariescu, M.A., 1996, *Prog. Theor. Phys.* **95**, 1199.

[25] Dariescu, C., and Dariescu, M.A., 1997, *Rom. Astron. J.* **7**, (*sub tipar*).

[26] Dariescu, C., and Dariescu, M.A., 1997, *Rom. J. Phys.* **42**, (*sub tipar*).

[27] Dariescu, M.A., and Dariescu, C., 1993, *TENSOR N.S.* **53**, 162.

[28] Dariescu, M.A., Dariescu, C., and Gottlieb, I., 1994, International Workshop on Global Analysis, Differential Geometry and Lie Algebra, Thessaloniki, (*sub tipar*).

[29] Dariescu, M.A., Dariescu, C., and Gottlieb, I., 1994, *Found. Phys.* **24**, 1523.

[30] Dariescu, M.A., Dariescu, C., and Gottlieb, I., 1995, *Found. Phys.* **25**, 957.

[31] Dariescu, M.A., Dariescu, C., and Gottlieb, I., 1995, *Proc. GR14 Int. Conf. on General Relativity and Gravitation*, **A.99**, Florence.

[32] Dariescu, M.A., and Dariescu, C., 1995, *Astron. Phys. J.* **5**, 61.

[33] DeWitt, B.S., 1963, în *Dynamical Theory of Groups and Fields*, 1963 Les Houches Summer School.

[34] DeWitt, B.S., 1967, *Phys. Rev.* **162**, 1239.

[35] Fadeev, L.D., and Popov, V.N., 1967, *Phys. Lett.* **25B**, 29.

[36] Feynman, R.P., 1963, *Acta Phys. Polon.* **XXIV**, 697.

[37] Freund, G.O., 1986, *Introduction to Supersymmetry*, Cambridge: Cambridge Univ. Press.

[38] Fritzsch, H., Gell-Mann, M., and Leutwyler, H., 1973, *Phys. Lett* **B47**, 365.

[39] Fulling, S.A., 1989, *Aspects of Quantum Field Theory in Curved Space-Time*, Cambridge: Cambridge Univ. Press.

[40] Georgi, H., and Glashow, S.L., 1974, *Phys. Rev. Lett* **32**, 438.

[41] Gheorghiev, G., şi Oproiu, V., 1977, *Geometrie Diferenţială*, Bucureşti: Ed. Didactică şi Pedagogică.

[42] 't Hooft, G., 1971, *Nucl. Phys.* **B35**, 167.

[43] Ianuş, S., 1983, *Geometrie Diferenţială cu Aplicaţii în Teoria Relativităţii*, Bucureşti: Ed. Acad. R.S.R.

[44] Kaku, M., 1993, *Quantum Field Theory. A Modern Introduction*, Oxford: Oxford Univ. Press.

[45] Kobayashi, S., and , Nomizu, K., 1963, *Foundations of Differential Geometry*, New York: Interscience Publ.

[46] Kramers, H.A., 1937, *Proc. Amsterdam Acad.* **40**, 814.

[47] Lee, T.D., and Yang, C.N., 1957, *Brookhaven National Lab.*, Associated Univ. Inc.

[48] Miron, R., şi Anastasiei, M., 1987, *Fibrate Vectoriale. Spaţii Lagrange. Aplicaţii în Teoria Relativităţii*, Bucureşti: Ed. Acad. R.S.R.

[49] Mohapatra, R.N., 1986, *Unification and Supersymmetry*, New York: Springer-Verlag.

[50] Nieuwenhuizen, P., 1981, *Phys. Rep.* **4**.

[51] Novacu, V., 1984, *Teoria Cuantică a Câmpurilor*, Bucureşti: Ed. Tehnică.

[52] Paschos, E.A., and Turke, U., 1989, *Phys. Rep.* **178**, 146.

[53] Pati, J.C., and Salam, A., 1973, *phys. Rev.* **D8**, 1240.

[54] Ramond, P., 1981, *Field Theory. A Modern Primer*, Reading: Benjamin/Cummings.

[55] Rîjic, I.M., and Gradştein, I.S., 1955, *Tabele de integrale, sume, serii şi produse*, Bucureşti: Ed. Tehnică.

[56] Ross, G.G., 1984, *Grand Unified Theories*, Reading: Benjamin/Cummings.

[57] Salam, A., 1957, *Il Nuovo Cimento* **5**, 299.

[58] Salam, A., 1969, *Elementary Particle Theory*, ed. N. Svartholm, Stockholm: Almquist and Wiksells.

[59] Sen, D., 1986, *J. Math. Phys.* **27**, 472.

[60] Sen, D., 1987, *Nucl. Phys.* **B284**, 201.

[61] Sen, D., 1990, *Phys. Rev.* **D41**, 667.

[62] Soleng, H.H., 1991, *Gen. Rel. Grav.* **23**, 1089.

[63] Straumann, N., 1984, *General Relativity and Relativistic Astrophysics*, Berlin: Springer-Verlag.

[64] Taylor, J.C., 1978, *Gauge Theories of Weak Interactions*, Cambridge: Cambridge Univ. Press.

[65] Weinberg, S., 1067, *Phys. Rev. Lett* **19**, 1264.

[66] West, P., 1988, CERN-TH Preprint 5165.

[67] Weyl, H., 1950, *Phys. Rev.* **77**, 699.

[68] Yang, C.N., and Mills, R.L., 1954, *Phy. Rev.* **96**, 191.

[69] Zet, G., 1990, *Found. Phys.* **20**, 111.

[70] Zet,G., Pasnicu, C., and Agop, M., 1991, *Found. Phys.* **21**, 473.

[71] Zet, G., Dariescu, C., and Dariescu, M.A., 1993, *TENSOR N.S.* **52**, 14.